Mecánica Clásica
Recuperatorio del segundo parcial, 22 de julio de 2021

Por favor, justifique todas sus respuestas y resuelva los problemas en hojas separadas.

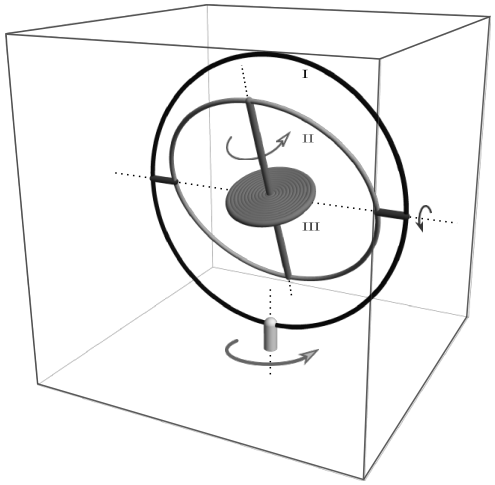
Problema 1: Sea la siguiente transformación $(q,p) \to (Q,P) : Q = -\dfrac{\alpha p}{q}$ y $P = \beta q^2$ siendo α y β constantes.
a) Hallar bajo que condiciones las ecuaciones anteriores representan una transformación canónica.
b) Aplique la transformación obtenida a $H(q,p) = \dfrac{\lambda p^2}{q^2} + q^2$ con $\lambda > 0$ y resuelva el nuevo hamiltoniano para hallar $q(t)$ y $p(t)$.
c) Dibujar el diagrama de fases para este sistema indicando si hay distintas regiones dinámicas.

Problema 2: Una partícula de masa m y carga eléctrica e se mueve en un plano xy sometida a un potencial central del tipo elástico $V(r) = \dfrac{1}{2}kr^2$ en presencia de un campo magnético constante $\vec{B} = B\hat{z}$ descripto en el gauge simétrico $\vec{A} = \dfrac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$.
a) Escriba el lagrangiano del sistema usando coordenadas polares en el plano de movimiento (*Ayuda: recordar que el potencial asociado a un campo magnético se escribe* $-e\vec{v} \cdot \vec{A}$). Halle los momentos generalizados y muestre que el Hamiltoniano del sistema es

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \left(\frac{p_\phi}{r} - \frac{eB}{2}r\right)^2\right] + \frac{k}{2}r^2$$

b) Plantee la ecuación de Hamilton-Jacobi y encuentre las expresiones para las funciones S y W en términos de una integral radial. Escriba las ecuaciones que relacionan las variables originales, r y ϕ, con el tiempo (no resuelva las integrales).

Problema 3: Un giróscopo está construido de la siguiente manera:

- un marco circular exterior que se mantiene siempre sobre el plano vertical y que gira alrededor del eje z.
- un marco circular interior, montado sobre el marco exterior como muestra la figura.
- una peonza simétrica, montada a su vez sobre el marco interior.

Los dos marcos I y II tienen los mismos momentos principales de inercia con respecto de sus centros de masa, $I_a = I_b$ e $I_c = 2I_a$. La peonza tiene momentos principales de inercia $I_1 = I_2 \equiv I$ e I_3 respecto de su centro de masa. Puede ver la siguiente animación.
a) Escribir el lagrangiano del sistema, haciendo explícita la elección de las coordenadas generalizadas.
b) ¿Es equivalente al problema de un giróscopo en donde no se tenga en cuenta la inercia de los marcos pero se modifiquen los momentos I e I_3 de la peonza?
c) Encontrar al menos 3 constantes de movimiento, expresadas en términos de las coordenadas generalizadas y sus velocidades.
d) Reducir el problema a un problema unidimensional para un solo grado de libertad.