

Mecánica Clásica A – 1er. cuatrimestre de 2021

Clase práctica del jueves 1/7.

*Ecuación de Hamilton–Jacobi en problemas relativistas. Movimiento hiperbólico.**

1.	La ecuación de H–J en problemas relativistas	1
2.	Partícula cargada en un campo eléctrico uniforme	3
2.1.	Método 1 (o de supervivencia)	4
2.2.	Método 2 (sin despeinarse)	6
2.3.	Método 3 (ecuación de Hamilton–Jacobi)	7
3.	El movimiento hiperbólico	10
3.1.	Movimiento hiperbólico, viajes espaciales y trayectorias aparentes	15
4.	Problemas	19

1. La ecuación de H–J en problemas relativistas

En varios problemas de la última guía, se les da un hamiltoniano inusual y se les pide resolver las ecuaciones de movimiento mediante la ecuación de Hamilton–Jacobi,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\mathbf{q}, \nabla_{\mathbf{q}} S, t) = 0. \quad (1)$$

Si el sistema es conservativo, saben separar la solución como

$$S(\mathbf{q}, t) = -Et + W(\mathbf{q}). \quad (2)$$

Si hay coordenadas cíclicas, digamos q_1 , prueban con

$$S(q_1, q_2, \dots, t) = \alpha_1 q_1 + S(q_2, \dots, t). \quad (3)$$

Si el sistema conservativo y separable intentan con

$$S(\mathbf{q}, t) = -Et + W_1(q_1) + W_2(q_2) + \dots + W_n(q_n). \quad (4)$$

Y en nada de esto importa mucho la forma particular del hamiltoniano. Si ahora apareciera un problema que pidiera resolver el movimiento para un hamiltoniano

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} + V(\mathbf{r}), \quad (5)$$

sería un problema entre tantos. Ya están acostumbrados a los hamiltonianos raros. El hamiltoniano anterior es el que corresponde a una partícula relativista de masa m en un potencial $V(\mathbf{r})$.

Los que hayan visto Relatividad Especial en Física 1, saben que la energía de una partícula libre es

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}, \quad (6)$$

*zanellaj@df.uba.ar

por lo que no debería extrañarles un hamiltoniano como el de la ec. (5). Desde el punto de vista de la Mecánica Clásica, este hamiltoniano se origina en el lagrangiano relativista

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - V(\mathbf{r}). \quad (7)$$

En efecto, el hamiltoniano siempre está definido de la misma manera,

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}, \quad (8)$$

donde

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (9)$$

En nuestro caso es

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (10)$$

Tomando el módulo, de aquí despejamos

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{p^2}{p^2 + m^2 c^2} \Rightarrow \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{mc^2}{\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}}. \quad (11)$$

Volviendo a la ec. (10) obtenemos la velocidad en términos del impulso

$$\mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}}. \quad (12)$$

Luego, el hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L} = \frac{(pc)^2}{\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}} + \frac{(mc^2)^2}{\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}} + V(\mathbf{r}) \\ &= \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} + V(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (13)$$

La ecuación de Hamilton–Jacobi sigue siendo la misma,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\mathbf{r}, \nabla S, t) = 0, \quad (14)$$

lo que cambia es la forma del hamiltoniano. Explícitamente,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sqrt{|c\nabla S|^2 + (mc^2)^2} + V = 0. \quad (15)$$

Es común ver escrita esta ecuación como

$$|\nabla S|^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + V \right)^2 + (mc)^2 = 0. \quad (16)$$

La demostración de que, si no depende explícitamente del tiempo, H se conserva no estaba sujeta a la forma particular de H , ni relacionada con ninguna propiedad especial de la energía cinética. Era un resultado contenido en las propias ecuaciones de Hamilton. De modo que, en relatividad especial, la definición de sistema conservativo, como aquel cuyo hamiltoniano no depende del tiempo, se mantiene. Para estos sistemas, la solución de la ecuación de H-J puede buscarse como

$$S(\mathbf{r}, t) = -Et + W(\mathbf{r}). \quad (17)$$

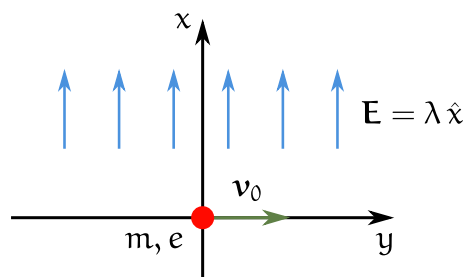
Para la forma particular del hamiltoniano (13), queda

$$\sqrt{|c\nabla W(\mathbf{r})|^2 + (mc^2)^2} + V(\mathbf{r}) = E. \quad (18)$$

Veremos a continuación el problema de una carga moviéndose en un campo eléctrico uniforme. Lo resolveremos por tres métodos. El primero, como si sólo supieran lo más elemental de relatividad especial, o como si fueran alumnos de matemática a los que les presentan cierta ecuación diferencial. El segundo, como si supieran algo relatividad especial. El tercero, como si no supieran absolutamente nada de relatividad especial, es decir, mediante el método de H-J.

2. Partícula cargada en un campo eléctrico uniforme

Una partícula de masa m y carga e se mueve en un campo eléctrico $\mathbf{E} = \lambda \hat{x}$, con $e\lambda > 0$. (Estamos tratando de no tener demasiadas letras E dando vueltas, por eso usamos λ para el campo eléctrico). Se trata de encontrar el movimiento de la partícula para todo t . Puede asumirse que la partícula parte desde el origen en $t = 0$, se mueve en el plano xy e inicialmente tiene velocidad $\dot{x} = 0$ y $\dot{y} = v_0$.



Si esto fuera un problema no relativista, sería equivalente al de una masa moviéndose en un campo gravitatorio uniforme $\mathbf{g} = g \hat{x}$. Ustedes ya saben que, en un campo así, en algún momento la partícula tiene velocidad \dot{x} igual a cero, cuando alcanza su máxima altura, antes de volver a caer (en realidad aquí el eje está dado vuelta, la partícula cae hasta una profundidad máxima y luego vuelve a subir). Algo similar tiene que pasar con la partícula relativista, con la diferencia de que no se va a acelerar hasta velocidades arbitrariamente grandes.

2.1. Método 1 (o de supervivencia)

En este método ustedes saben lo mínimo de dinámica relativista: la generalización de la segunda ley de Newton:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (19)$$

donde

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (20)$$

El factor que multiplica a $m\mathbf{v}$ aparece con tanta frecuencia que tiene su propia notación,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (21)$$

Si hay más de una velocidad involucrada, suele escribirse $\gamma(\mathbf{v})$.

En la ec. (19) la fuerza es debida al campo eléctrico,

$$\mathbf{F} = e\lambda \hat{\mathbf{x}}. \quad (22)$$

Asumiendo que el movimiento ocurre en el plano xy , lo que es consecuencia de que inicialmente sea $v_z = 0$, el par de ecuaciones diferenciales que tienen que resolver es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = e\lambda, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{mv_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = 0. \quad (23)$$

Notarán que la dificultad radica en que las dos componentes de la velocidad están acopladas a través del factor γ . Sin embargo, podemos usar la segunda ecuación para despejar v_y en función de v_x . Esta ecuación nos dice que

$$\frac{mv_y}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2}}} = p_0. \quad (24)$$

Despejando v_y se obtiene

$$\frac{v_y^2}{c^2} = (1 - v_x^2/c^2) \frac{(p_0 c)^2}{(p_0 c)^2 + (m c^2)^2}. \quad (25)$$

Puesto que, por hipótesis $v_x(0) = 0$, la energía cinética inicial es

$$E_0 = \sqrt{(p_y c)^2 + (m c^2)^2} = \sqrt{(p_0 c)^2 + (m c^2)^2}. \quad (26)$$

De manera que

$$\frac{v_y^2}{c^2} = (1 - v_x^2/c^2) \frac{(p_0 c)^2}{E_0^2}. \quad (27)$$

Con esto ya podemos escribir el factor γ puramente en términos de v_x , que es lo que necesitamos para poder resolver la primera ec. (23),

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2)/c^2}} = \frac{E_0}{mc^2 \sqrt{1 - v_x^2/c^2}}. \quad (28)$$

Finalmente, reemplazando en la primera ec. (23) obtenemos una ecuación cerrada para v_x ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v_x/c}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} \right) = \frac{e c \lambda}{E_0}. \quad (29)$$

Esto puede integrarse inmediatamente. Con la condición inicial $v_x(0) = 0$, resulta

$$\frac{v_x/c}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} = \frac{e \lambda c t}{E_0}. \quad (30)$$

Ahora tenemos que despejar v_x e integrar para obtener x ,

$$\frac{v_x}{c} = \frac{e \lambda c t / E_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{e \lambda c t}{E_0} \right)^2}}. \quad (31)$$

La ec. (30) muestra que v_x tiene el mismo signo que t , de modo que no ha sido necesario insertar un signo \pm al tomar la raíz cuadrada en la ecuación anterior. No hay ninguna dificultad en integrar $x(t)$. Teniendo en cuenta que $x(0) = 0$,

$$x(t) = \frac{E_0}{e \lambda} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{e \lambda c t}{E_0} \right)^2} - 1 \right]. \quad (32)$$

Integrar $y(t)$ es otra historia. Primero usamos el resultado (31) en la ec. (27) para tener v_y^2/c^2 en función del tiempo. Luego tomamos la raíz cuadrada (notando que v_y siempre tiene el mismo signo que p_0) y obtenemos una ecuación diferencial para $y(t)$,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_0 c^2 / E_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{e \lambda c t}{E_0} \right)^2}}. \quad (33)$$

La integral es inmediata. Con $y(0) = 0$, resulta

$$y(t) = \frac{p_0 c}{e \lambda} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{e \lambda c t}{E_0} \right). \quad (34)$$

En cuanto a la trayectoria en el plano xy , lo que podemos hacer es despejar t en términos de x a partir la ec. (32) y reemplazar en la ecuación anterior:

$$y(x) = \frac{p_0 c}{e\lambda} \operatorname{arcsinh} \sqrt{\left(\frac{e\lambda x}{E_0} + 1\right)^2 - 1}. \quad (35)$$

Pero

$$\operatorname{arcsinh} \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{arccosh} x, \quad (36)$$

de manera que, finalmente,

$$x(y) = \frac{E_0}{e\lambda} \left[\cosh\left(\frac{e\lambda y}{p_0 c}\right) - 1 \right]. \quad (37)$$

2.2. Método 2 (sin despeinarse)

En lugar de resolver la ecuación $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ para las velocidades, primero resolvemos para los impulsos. Tenemos

$$\dot{p}_x = e\lambda, \quad \dot{p}_y = 0. \quad (38)$$

Esto implica

$$p_x = e\lambda t, \quad p_y = p_0. \quad (39)$$

Por otro lado, puesto que el campo eléctrico tiene asociado un potencial $V(x) = -e\lambda x$, la ecuación de conservación de la energía se lee como

$$\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - e\lambda x = E_0. \quad (40)$$

Casi que no hay que hacer nada. Ya conocemos \mathbf{p} como función del tiempo, así que directamente podemos despejar $x(t)$,

$$x(t) = \frac{1}{e\lambda} \left[\sqrt{(e\lambda t)^2 c^2 + (p_0 c)^2 + (mc^2)^2} - E_0 \right]. \quad (41)$$

Aquí reconocemos $(p_0 c)^2 + (mc^2)^2 = E_0^2$. En definitiva, queda

$$x(t) = \frac{E_0}{e\lambda} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{e\lambda ct}{E_0}\right)^2} - 1 \right], \quad (42)$$

que coincide con el resultado del primer método.

Para encontrar el movimiento en la dirección y , primero notamos que la ec. (40) puede ser reescrita como

$$mc^2 \gamma - e\lambda x = E_0, \quad (43)$$

lo que implica

$$\gamma = \frac{1}{mc^2}(E_0 + e\lambda x) = \frac{E_0}{mc^2} \sqrt{1 + \left(\frac{e\lambda ct}{E_0}\right)^2}. \quad (44)$$

Por otro lado sabemos que $m\gamma v_y = p_0$. Reuniendo ambos resultados queda

$$v_y = \frac{p_0}{m\gamma} = \frac{p_0 c^2}{E_0 \sqrt{1 + \left(\frac{e\lambda ct}{E_0}\right)^2}}. \quad (45)$$

A partir de aquí se continúa como en el primer método.

2.3. Método 3 (ecuación de Hamilton–Jacobi)

Este método en este problema es el más directo de todos. Tal vez no lo parecerá tanto, pero eso es porque estamos obligados a trabajar con algún detalle. En cuentas netas, no ocuparía más de diez líneas. Este método evita tener que hacer malabares con las expresiones relativistas de la energía y el impulso. No sé si llamarlo una ventaja, pero siguiendo este camino no hace falta saber nada de relatividad, a excepción del hamiltoniano.

Ahora llamaremos E no sólo a la energía cinética sino a la energía total, cinética más potencial. El hamiltoniano es

$$H(x, y, p_x, p_y) = \sqrt{(p_x c)^2 + (p_y c)^2 + (mc^2)^2} - e\lambda x. \quad (46)$$

La ecuación de Hamilton–Jacobi para la función característica de Hamilton es

$$\sqrt{c^2 \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + (mc^2)^2} - e\lambda x = E. \quad (47)$$

Debido a que y es coordenada cíclica, separamos W como

$$W(x, y) = p_0 y + W_x(x). \quad (48)$$

De manera inmediata encontramos que $W_x(x)$ satisface la siguiente ecuación

$$W'_x(x) = \pm \frac{1}{c} \sqrt{(E + e\lambda x)^2 - E_0^2}, \quad (49)$$

donde, como antes,

$$E_0^2 = (p_0 c)^2 + (mc^2)^2. \quad (50)$$

Nunca se repetirá la suficiente que no es necesario, en principio, integrar la ecuación para W , porque para resolver el movimiento nos alcanza con calcular sus derivadas, y es más fácil derivar primero e integrar después que integrar y luego derivar.

La solución formal para W es

$$W(x, y, E, p_0) = p_0 y \pm \frac{1}{c} \int_{x_E}^x dx \sqrt{(E + e\lambda x)^2 - E_0^2}. \quad (51)$$

El extremo inferior de la integral es el punto de retorno donde se anula p_x o, lo que es lo mismo, donde se anula $W'_x(x)$. Esta elección es práctica, pero bien podría elegirse otro punto. Notar que ya incluimos en W su dependencia en las constantes de separación E y p_0 . Eso es mucho muy importante.

Si identificamos $W(x, y, E, p_0)$ con una función generatriz de tipo F_2 , asignando los lugares que ocupan E y p_0 a los nuevos impulsos, el nuevo hamiltoniano es

$$K(Q_1, Q_2, E, p_0) = E. \quad (52)$$

La derivada parcial de W respecto de E nos da una de las nuevas coordenadas

$$Q_1 = \frac{\partial W}{\partial E} = \pm \frac{1}{c} \int_{x_E}^x dx \frac{\partial}{\partial E} \sqrt{(E + e\lambda x)^2 - E_0^2}. \quad (53)$$

Este es uno de esos casos en los que la integral es trivial, porque E y x aparecen en una combinación lineal: derivar respecto de E es lo mismo que derivar respecto de x y dividir por $e\lambda$. Hecho lo cual nos quedará la integral de una derivada. La elección del punto de retorno como extremo inferior de integración simplifica las cosas aún más. El resultado final es

$$Q_1 = \pm \frac{1}{e\lambda c} \sqrt{(E + e\lambda x)^2 - E_0^2}. \quad (54)$$

La coordenada Q_1 evoluciona de acuerdo a la ecuación

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial K}{\partial E} = 1. \quad (55)$$

Es decir,

$$Q_1 = t + Q_{10}. \quad (56)$$

Según las condiciones iniciales del problema, $E = E_0$. Usando el resultado anterior en la ec. (54) despejamos $x(t)$,

$$x(t) = \frac{E_0}{e\lambda} \left\{ \sqrt{1 + \left[\frac{e\lambda c}{E_0} (t + Q_{10}) \right]^2} - 1 \right\}. \quad (57)$$

La condición inicial $x(0) = 0$ fija el valor de Q_{10} en cero. Volvemos a obtener el mismo resultado de antes. Hay que observar que al tomar la raíz cuadrada en la ecuación anterior, el dilema entre los dos signos posibles se resolvió notando que la ec. (47), con $E = E_0$, implica $e\lambda x + E_0 > 0$.

Si no se ha percibido una gran superioridad de este método respecto de los anteriores en lo que respecta a encontrar $x(t)$, con seguridad se apreciarán mejor sus méritos al determinar la órbita $x(y)$. Con la ec. (51) a la vista,

$$W(x, y, E, p_0) = p_0 y \pm \frac{1}{c} \int_{x_E}^x dx \sqrt{(E + e\lambda x)^2 - E_0^2}, \quad (58)$$

teniendo en cuenta la dependencia de E_0 en p_0 , la ecuación que define la nueva coordenada Q_2 es

$$Q_2 = \frac{\partial W}{\partial p_0} = y \mp \int_{x_E}^x dx \frac{p_0 c}{\sqrt{(E + e\lambda x)^2 - E_0^2}}. \quad (59)$$

La integral es inmediata,

$$Q_2 = y \mp \frac{p_0 c}{e\lambda} \operatorname{arccosh} \left(\frac{E + e\lambda x}{E_0} \right). \quad (60)$$

Luego,

$$x = \frac{E_0}{e\lambda} \left\{ \cosh \left[\frac{e\lambda(y - Q_2)}{p_0 c} \right] - 1 \right\}. \quad (61)$$

Aquí hemos usado nuevamente que, según las condiciones iniciales, $E = E_0$. Además, para $y = 0$ debe ser $x = 0$, lo que fija el valor de Q_2 en cero. Recordemos que la dinámica de esta coordenada es $\dot{Q}_2 = 0$, sólo nos restaba fijar su valor constante. En definitiva,

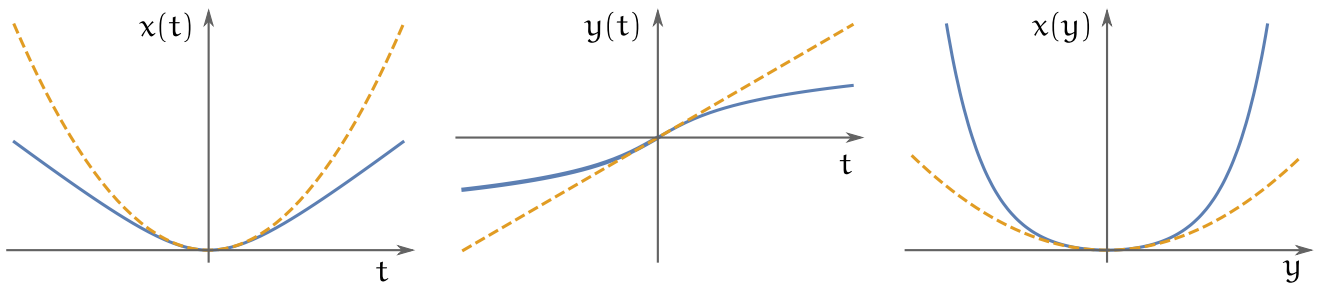
$$x(y) = \frac{E_0}{e\lambda} \left[\cosh \left(\frac{e\lambda y}{p_0 c} \right) - 1 \right], \quad (62)$$

que coincide con la ec. (37).

En las próximas secciones consideraremos el caso $p_y = 0$, de modo que el movimiento estará limitado al eje x . Pero antes notemos algunas propiedades del movimiento en más de una dimensión. Primero, si ahora consideran que inicialmente también hay velocidad según z , es fácil demostrar que el movimiento sigue siendo plano. La normal al plano sobre el que se mueve la partícula es

$$\mathbf{n} = \frac{-v_z \hat{y} + v_y \hat{z}}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}, \quad (63)$$

es decir, es el plano que contiene al eje x y a la velocidad inicial. Por eso, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que el movimiento ocurre en el plano xy . Contrariamente a lo que pasa en mecánica no relativista, donde la componente de la velocidad normal a la fuerza se mantiene constante, aquí v_y tiende a cero cuando $|t| \rightarrow \infty$. La siguiente figura muestra la comparación entre los gráficos de las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $x(y)$ para los casos relativista (línea llena) y no relativista (línea de trazos).



3. El movimiento hiperbólico

El caso del movimiento unidimensional de una carga en un campo eléctrico uniforme es un ejemplo de lo que se conoce en relatividad como movimiento hiperbólico. Veremos aquí algunas de sus propiedades.

Restringimos el problema al eje x . El hamiltoniano es

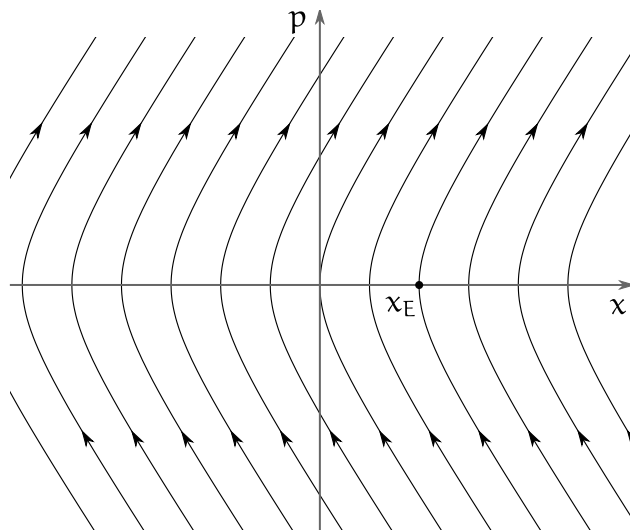
$$H(x, p) = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - e\lambda x, \quad (64)$$

donde, como antes, λ es la magnitud del campo eléctrico y por simplicidad asumimos que $e\lambda > 0$, así que la fuerza es hacia arriba. Debido a que es un sistema conservativo, el retrato de fase es el gráfico de las curvas de nivel de la función $H(x, p)$. Aunque podríamos despejar $p(x, E)$ a partir de la ec. (64), esta vez conviene proceder a la inversa y despejar $x(p, E)$. A partir de la ec. (64) tenemos

$$x(p, E) = \frac{1}{e\lambda} \left[\sqrt{(pc)^2 + E_0^2} - E \right], \quad (65)$$

donde $E_0 = mc^2$ es la energía de la masa en reposo. Para una dada energía E , x alcanza un valor mínimo en el punto de retorno

$$x_E = \frac{E_0 - E}{e\lambda}. \quad (66)$$



Hay que notar que la relación entre la velocidad y el impulso ya no es $p = m\dot{x}$, sino

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{pc^2}{\sqrt{(pc)^2 + E_0^2}}. \quad (67)$$

Sigue siendo cierto que p y \dot{x} tienen el mismo signo, pero cuando $|p| \rightarrow \infty$ el módulo de la velocidad tiende a c . El sentido de las flechas en la figura anterior está determinado por la ec. (67), pues \dot{x} tiene el mismo signo que p . La partícula se aproxima a x_E desde $x \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow -\infty$, pasa por x_E en cierto instante t_0 y para $t \rightarrow \infty$ de nuevo resulta $x \rightarrow \infty$. Para $|pc| \gg E_0$, la trayectoria en el espacio de fase tiende a las asíntotas

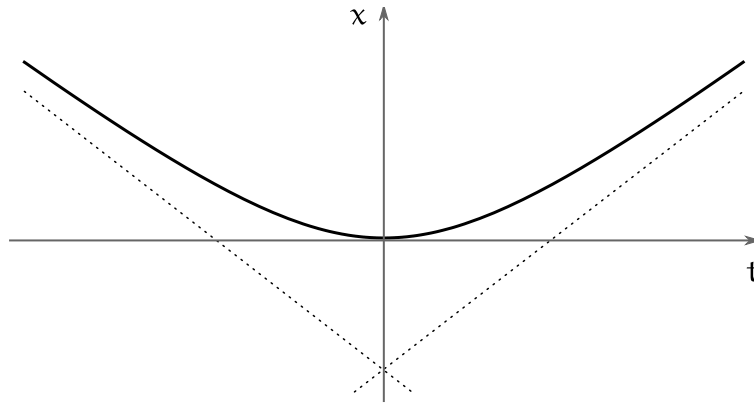
$$x(p, E) \rightarrow \frac{1}{e\lambda}(|pc| - E). \quad (68)$$

En realidad, con sólo ver la ec. (65) podríamos haber adelantado que las trayectorias en el espacio de fase son hipérbolas.

Si restringimos los resultados de la sección anterior al caso unidimensional, el movimiento de una partícula que pasa por el origen en $t = 0$ con velocidad nula es

$$x(t) = \frac{mc^2}{e\lambda} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{e\lambda ct}{mc^2} \right)^2} - 1 \right]. \quad (69)$$

Su trayectoria es como muestra la figura.



Para $e\lambda c|t| \ll mc^2$, es decir, cuando la partícula está cerca del punto en el que su velocidad se anula, resulta

$$x(t) \simeq \frac{e\lambda}{2m} t^2. \quad (70)$$

Este es el resultado no relativista para la trayectoria de una partícula con aceleración constante $a = e\lambda/m$. Notar que no depende de c . En contraste, para $e\lambda c|t| \gg mc^2$,

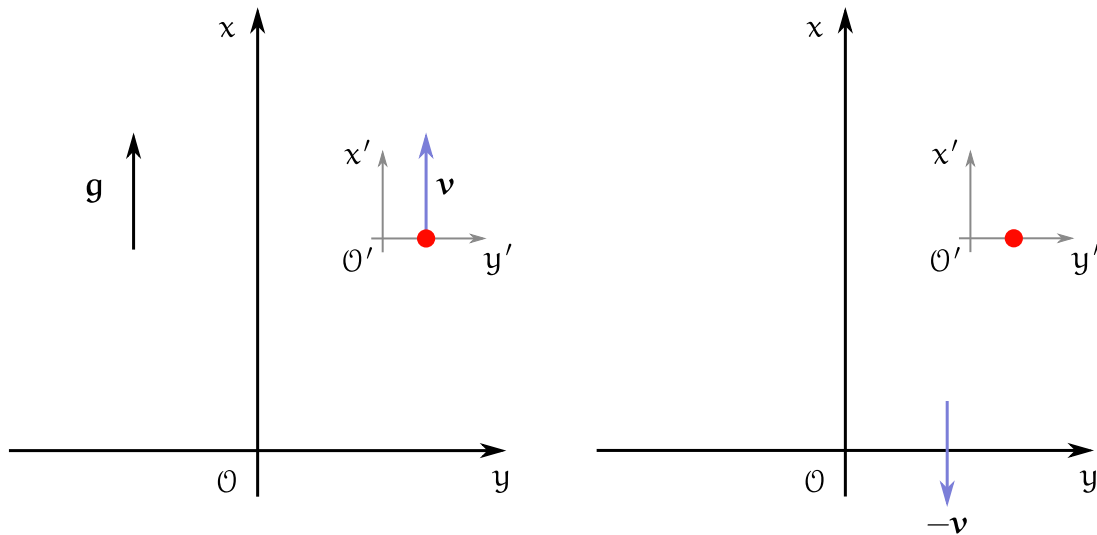
$$x(t) \simeq c|t| - \frac{mc^2}{e\lambda}, \quad (71)$$

lo que da la ecuación de las asíntotas.

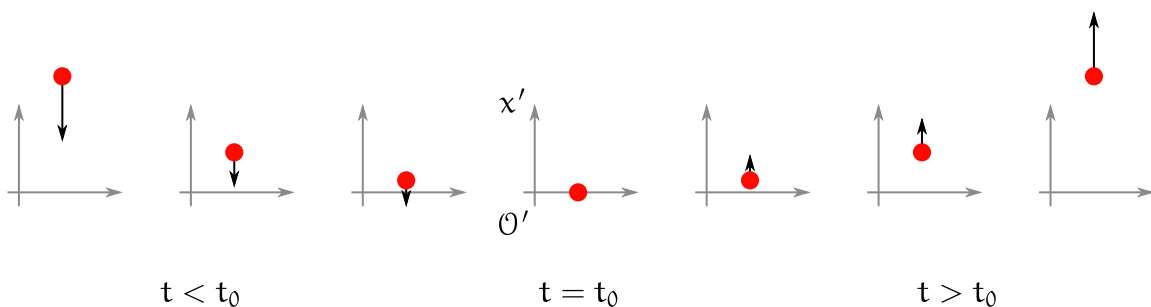
Una propiedad fundamental del movimiento hiperbólico está relacionada con la aceleración que mide un observador inercial que instantáneamente se mueve con la misma velocidad de la partícula.

Para entender mejor el problema relativista, imaginen primero el siguiente experimento de mecánica newtoniana. Una partícula se mueve en un campo gravitatorio uniforme $\mathbf{g} = g \hat{x}$ medido en el sistema de referencia inercial al que pertenece un observador \mathcal{O} . Notar que para mejorar la analogía con el problema de movimiento hiperbólico, aquí la aceleración de la gravedad apunta hacia arriba. Una partícula arrojada hacia abajo, se frenará en algún momento y luego comenzará a subir acelerada por la gravedad.

Ahora imaginen que, en determinado momento t_0 , la partícula pasa junto a un observador inercial \mathcal{O}' que se mueve en ese instante justo a la misma velocidad \mathbf{v} que la partícula. Para ese observador, en el momento del encuentro la partícula tendrá velocidad nula. La figura muestra el instante del encuentro desde las dos perspectivas. En la figura de la izquierda tanto la partícula como \mathcal{O}' se mueven con velocidad \mathbf{v} respecto de \mathcal{O} . En la figura de la derecha, es \mathcal{O} el que se mueve con respecto a \mathcal{O}' con velocidad $-\mathbf{v}$, mientras que la partícula está instantáneamente en reposo. (<https://tinyurl.com/3xcpm9zy>).



Lo que \mathcal{O}' verá después del momento en que la partícula está instantáneamente en reposo será exactamente igual a lo que vería si dejase libre una partícula desde el reposo, es decir, la vería subir desde el reposo con aceleración g .



Si el encuentro ocurre en $t' = 0$, en su sistema de referencia la trayectoria de la partícula según \mathcal{O}' sería

$$x'(t') = \frac{1}{2}gt'^2. \quad (72)$$

Esta conclusión tiene un punto discutible. Estamos asumiendo que para el observador en movimiento existe el mismo campo gravitatorio g . No nos cuestionamos que pueda medir otra cosa. En última instancia, como demostraremos en un momento, este es un resultado que proviene de la invariancia de la fuerza en la mecánica newtoniana respecto a las transformaciones entre sistemas de referencia inerciales, así que no hay nada cuestionable en el argumento.

Imaginen ahora el mismo experimento para el caso del movimiento hiperbólico. En el sistema de referencia original, la partícula en determinado momento t_0 pasa junto a un observador inercial \mathcal{O}' que se mueve justo a su misma velocidad. Para este observador, lo que haga la partícula a continuación será exactamente igual a lo que hagan las partículas que él mismo deje libres, con velocidad nula, en su sistema de referencia. La pregunta es: ¿cuál es el movimiento de estas partículas vistas por \mathcal{O}' ? Ya hemos visto que un observador \mathcal{O} en el sistema de referencia original, donde el campo eléctrico vale λ , mide que las partículas en reposo en $t = 0$ que parten desde el origen se mueven inicialmente según la ecuación

$$x(t) \simeq \frac{e\lambda}{2m}t^2, \quad (73)$$

y bien puede afirmar que esas partículas tienen una aceleración inicial $e\lambda/m$. ¿Cuál será la trayectoria que sigan las partículas que justo están en reposo según el observador \mathcal{O}' ? Es previsible que inicialmente valga también una ecuación como la anterior. Pero ahora nada sabemos acerca del valor del campo eléctrico que mide el observador \mathcal{O}' , como mucho podemos prever una ecuación del tipo

$$x'(t') \simeq \frac{(e\lambda)'}{2m}t'^2. \quad (74)$$

Sin embargo, estamos en condiciones de dar una respuesta, porque conocemos el movimiento de las partículas en el sistema al que pertenece \mathcal{O} y mediante las transformaciones de Lorentz podemos deducir cuál es su movimiento según el observador \mathcal{O}' . Eso nos dará la respuesta acerca de la transformación del producto $e\lambda$ entre dos sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo.

¿Cómo haríamos esta operación en el caso del primer experimento? El observador \mathcal{O} deja libre una partícula desde el reposo. La trayectoria de la partícula es

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2. \quad (75)$$

En el instante $t = t_0$ la partícula se cruza con un observador \mathcal{O}' que se mueve justo a su

misma velocidad, $v_0 = gt_0$. Redefinamos los orígenes del tiempo y del eje x en el sistema de \mathcal{O} de modo que el encuentro ocurra en $x = 0$ y $t = 0$. Con los orígenes redefinidos, la trayectoria será entonces

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2. \quad (76)$$

Tomemos también $x' = 0$ y $t' = 0$ como las coordenadas del punto de encuentro de la partícula con el observador \mathcal{O}' en su propio sistema de referencia. En resumen: en $t = 0$ junto a la partícula pasa un observador \mathcal{O}' que se mueve con velocidad v_0 . La transformación galileana entre las mediciones de los dos observadores está dada por

$$t' = t, \quad x' = x - v_0 t. \quad (77)$$

Los eventos que estamos considerando son el conjunto de posiciones de la partícula $\{t, x(t)\}$. Un tal evento según \mathcal{O}' tendrá coordenadas

$$\begin{cases} t' = t, \\ x' = x(t) - v_0 t = \frac{1}{2} g t^2. \end{cases} \quad (78)$$

Esto nos da las ecuaciones paramétricas de la trayectoria parametrizadas según el tiempo t . Pero como $t = t'$, directamente podemos escribir la trayectoria medida por \mathcal{O}' en términos de su propio reloj,

$$x'(t') = \frac{1}{2} g t'^2. \quad (79)$$

Es el resultado evidente que habíamos anticipado. Para el observador \mathcal{O}' la partícula simplemente *cae* desde el reposo, puesto que está en reposo en el instante inicial. Pero el resultado no es tan falto de contenido como parece. Puesto que nos da una confirmación de que la aceleración del campo gravitatorio es la misma tanto para \mathcal{O} como para \mathcal{O}' , independientemente de la velocidad de \mathcal{O}' . El resultado importante es que aparece el mismo factor g tanto en la ec. (79) como en la ec. (75).

Sigamos las mismas pautas para el problema relativista. Mediante una redefinición de los orígenes de x y de t podemos hacer que el punto de la trayectoria en el que la partícula cruce por la posición de \mathcal{O}' sea $x = 0$ y $t = 0$. Es fácil ver que la ecuación de la trayectoria según \mathcal{O} es

$$x(t) = \frac{c}{\omega} \left[\sqrt{1 + \omega^2 (t + t_0)^2} - \sqrt{1 + \omega^2 t_0^2} \right], \quad (80)$$

donde, por comodidad, hemos definido

$$\omega = \frac{e\lambda c}{mc^2}. \quad (81)$$

En el momento del encuentro la partícula tiene velocidad

$$v_0 = \frac{\omega t_0 c}{\sqrt{1 + \omega^2 t_0^2}}. \quad (82)$$

Para escribir las transformaciones de Lorentz también vamos a necesitar el factor γ ,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = \sqrt{1 + \omega^2 t_0^2}. \quad (83)$$

En el sistema de \mathcal{O} , los eventos que estamos considerando tienen coordenadas $\{t, x(t)\}$. En el sistema de \mathcal{O}' tendrán coordenadas

$$\begin{cases} t' = \gamma [t - v_0 x(t)/c^2], \\ x' = \gamma [x(t) - v_0 t]. \end{cases} \quad (84)$$

Ahora es complicado quitarse de encima t para encontrar $x'(t')$. Deberían verificar que

$$x'(t') = \frac{mc^2}{e\lambda} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{e\lambda c t'}{mc^2} \right)^2} - 1 \right]. \quad (85)$$

No es extraño que esta sea la ecuación para el movimiento hiperbólico de una carga que parte desde el reposo. Es decir, no es extraño que las partículas según \mathcal{O}' se muevan también en un campo eléctrico uniforme y constante. Lo que es extrañísimo es que el valor de $e\lambda$ sea el mismo que según \mathcal{O} . Si damos por aceptado el carácter escalar de la carga eléctrica, este resultado demuestra que un campo eléctrico paralelo a la dirección de movimiento relativo de dos sistemas no cambia ante la transformación que lleva de un sistema al otro. En especial, para el observador \mathcal{O}' , la trayectoria de la partícula para tiempos t' pequeños estará dada por la misma aproximación de antes

$$x'(t') \simeq \frac{e\lambda}{2m} t'^2. \quad (86)$$

Aunque este observador se está moviendo con respecto a \mathcal{O} con velocidad v_0 arbitraria, la partícula se acelera con la misma aceleración $a = e\lambda/m$. En un mundo relativista, donde todo parece tener leyes de transformación inusuales, encontramos algo que no cambia.

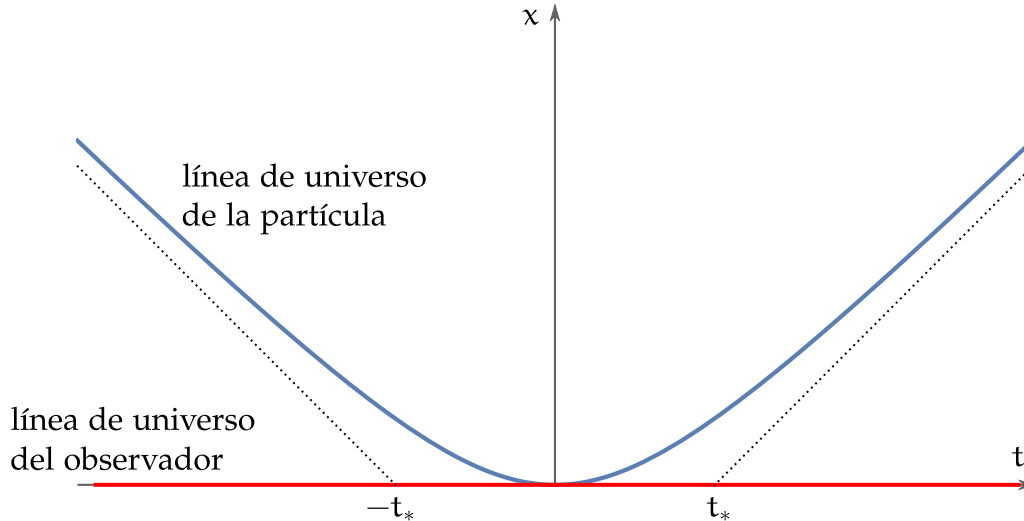
3.1. Movimiento hiperbólico, viajes espaciales y trayectorias aparentes

La aceleración de una partícula medida en un sistema de referencia inercial en donde la partícula está instantáneamente en reposo se llama aceleración propia. El movimiento hiperbólico se caracteriza por ser aquel en el que la aceleración propia es constante. Lo que puede resumirse diciendo que la partícula siempre *siente* la misma aceleración. En una nave espacial que siguiera un movimiento hiperbólico, un astronauta de masa m siempre sentiría que su peso es ma . Por eso el movimiento hiperbólico con $a = g$ se toma muchas veces como modelo de viaje interestelar.

Tomemos como paradigma del movimiento hiperbólico la trayectoria de la partícula que, moviéndose a lo largo del eje x con aceleración propia a , a tiempo $t = 0$ pasa por el origen. A partir de los resultados de la sección anterior es fácil ver que la trayectoria es

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} - 1 \right]. \quad (87)$$

(Sólo hay que reemplazar $e\lambda/m$ por a). Si en el origen hay un observador que registra la trayectoria de la partícula, las líneas de universo del observador y de la partícula son como las que muestra la figura.



La partícula, por decirlo de alguna manera, cae desde el infinito, se frena al llegar a $x = 0$ y vuelve a irse por donde vino.

En la ecuación anterior aparecen una escala característica de tiempo y una escala característica de longitud,

$$t_* = \frac{c}{a}, \quad l_* = \frac{c^2}{a}. \quad (88)$$

A manera de ejemplo, si el movimiento tiene lugar con aceleración propia $a = g \approx 10 \text{ m/s}^2$, las escalas características de tiempo y longitud son, respectivamente,

$$t_* \approx 3 \times 10^7 \text{ s} \approx 1 \text{ año}, \quad l_* \approx 1 \text{ año luz}. \quad (89)$$

La ec. (87) se escribe entonces como

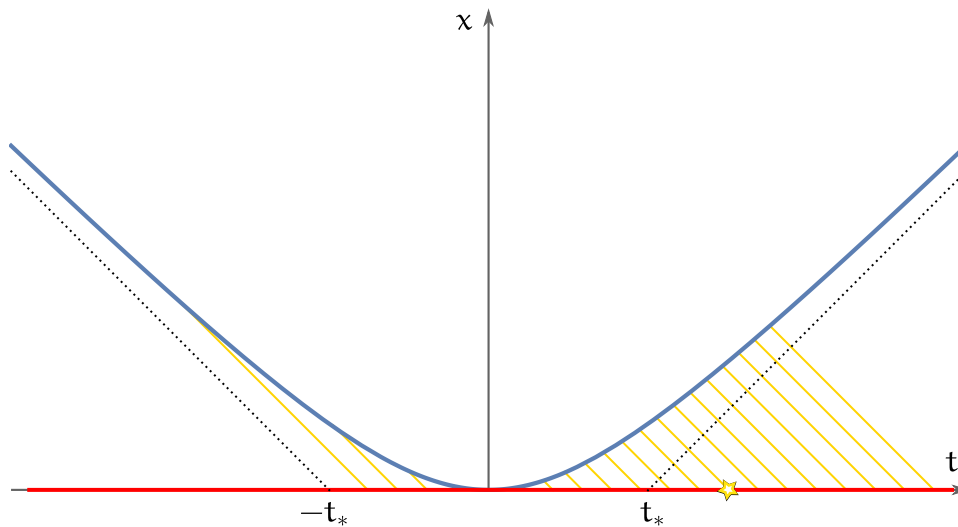
$$x(t)/l_* = \sqrt{1 + (t/t_*)^2} - 1. \quad (90)$$

Definiendo variables adimensionales $x/l_* \rightarrow x$ y $t/t_* \rightarrow t$, la trayectoria es, simplemente,

$$x(t) = \sqrt{1 + t^2} - 1. \quad (91)$$

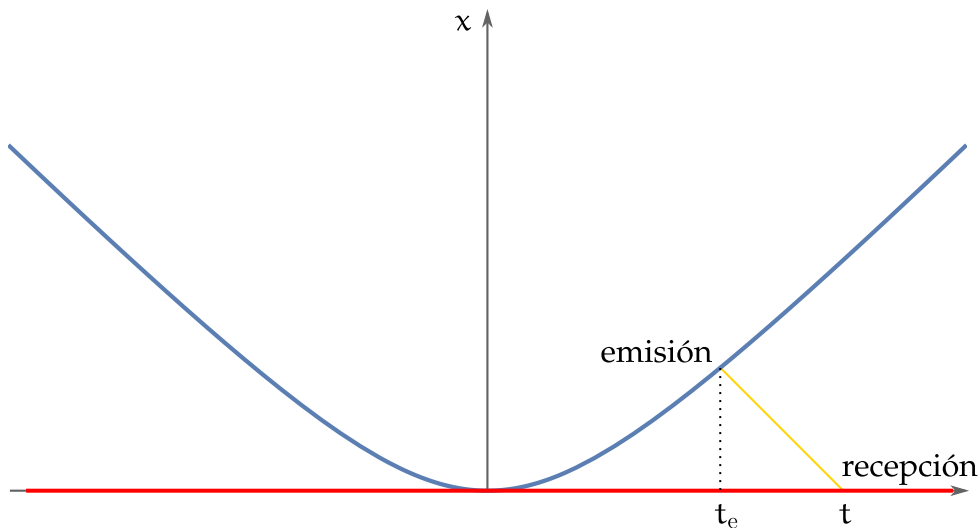
Además, trabajando con estas variables adimensionales resulta $c = 1$.

Si la partícula emite luz, las líneas de universo de los rayos de luz que emite hacia el observador son líneas rectas a 45° grados, como muestra la figura en trazo amarillo.



Las líneas de universo de los rayos de luz intersectan la línea de universo del observador. Esos eventos corresponden a la observación de la partícula por parte del observador. Para $t < -t_*$, ningún rayo de luz llega desde la partícula hasta el observador. El observador comienza a ver a la partícula súbitamente cuando $t = -t_*$.

Asociados a cada evento de observación hay dos instantes fundamentales: el tiempo t en el que la luz alcanza al observador y el tiempo t_e en el que fue emitida. El observador a tiempo t ve a la partícula en la posición que ocupaba a tiempo t_e .



Si la luz se recibe a tiempo t , entonces tiene que haber sido emitida en un tiempo anterior t_e tal que en el intervalo $t - t_e$ haya viajado la distancia que separaba a la partícula del observador al momento de emisión. Es decir,

$$c(t - t_e) = |x(t_e)|. \quad (92)$$

Puesto que $x(t_e) > 0$, en las unidades naturales t_e está definido implícitamente por

$$t - t_e = x(t_e) \quad \Rightarrow \quad t - t_e = \sqrt{1 + t_e^2} - 1. \quad (93)$$

De aquí es fácil obtener t_e como función de t ; esto es, el tiempo al que fue emitida la luz que llega al observador a tiempo t ,

$$t_e(t) = \frac{t^2 + 2t}{2(1 + t)}. \quad (94)$$

Esto sólo es válido para $t \geq -t_*$. Antes de $-t_*$ ningún rayo de luz emitido por la partícula llega al observador. (Recordar que en nuestras variables adimensionalizadas $t_* = 1$).

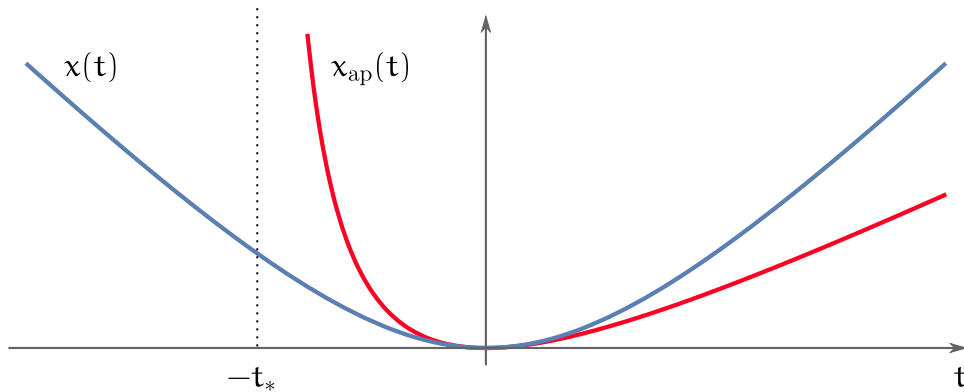
Desde el origen, a tiempo t llega luz de la partícula emitida a tiempo $t_e(t)$. En otras palabras, la partícula es vista a tiempo t en la posición que ocupaba en $t_e(t)$,

$$x_{ap}(t) = x(t_e(t)) = t - t_e(t) = \frac{t^2}{2(1 + t)}. \quad (95)$$

Esta es la posición a la que es vista la partícula desde el origen a tiempo t . Notablemente, la velocidad aparente a la que se mueve la partícula, según es vista desde el origen, es

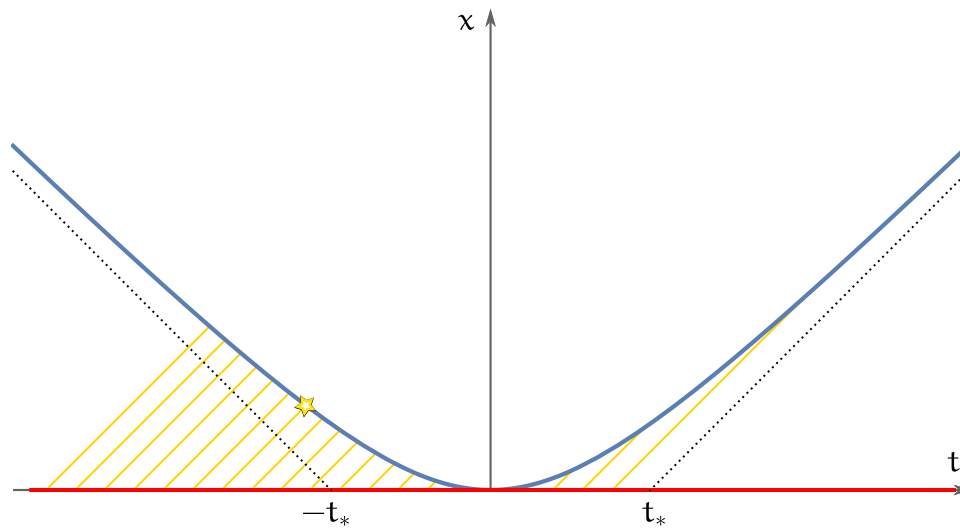
$$\dot{x}_{ap}(t) = \frac{t^2 + 2t}{2(1 + t)^2}. \quad (96)$$

Para $t \rightarrow -t_*^+$ esta velocidad tiende en módulo a infinito. En cambio, para $t \rightarrow \infty$, la velocidad aparente se aproxima a $c/2$, aunque la velocidad real tienda a c .



En las figuras anteriores puede verse que para todo tiempo t_e de emisión de luz desde la partícula, existe un t de recepción por el observador en el origen. Esto quiere decir que toda la trayectoria de la partícula es visible desde el origen.

Cambiamos el punto de vista y analicemos lo que ocurre con la luz emitida por el observador hacia la partícula. Ahora las líneas de universo que nos interesan son las de los rayos de luz que se emiten desde el origen en dirección a la partícula.



Ocurre entonces algo extraño. Todos los rayos emitidos antes de $t = t_*$ llegan a la partícula en algún momento. Pero para $t \geq t_*$ ninguno de los rayos de luz emitidos por el observador logra alcanzar a la partícula. Si un observador se mueve con la partícula, podrá ser testigo de la vida del observador en el origen únicamente hasta que los relojes de este último marquen el tiempo $t \rightarrow t_*$. Se habla entonces de la existencia de un horizonte para el observador acelerado. Recíprocamente, si el observador en el origen desea comunicarle algo al observador que se mueve con la partícula o si, simplemente, pretende destruirlo con un disparo de rayo láser, tendrá que decidirse antes de t_* .

4. Problemas

Aunque son problemas en donde importa el carácter relativista de las partículas, la mayoría tiene conexión directa con los temas incluidos en el parcial. El primer problema es el único que no entra en esta clasificación.

1. La ecuación relativista para la variación del impulso de una partícula es

$$\frac{d\mathbf{m}\gamma(\mathbf{v})\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (97)$$

Deducir de aquí el equivalente relativista de la segunda ley de Newton:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\gamma(\mathbf{v})} \left[\mathbf{F} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) \mathbf{v} \right]. \quad (98)$$

A igual módulo de \mathbf{F} , comparar las aceleraciones si la fuerza es paralela o normal a la velocidad. ¿Qué forma toma la ecuación anterior en el límite en que $v \rightarrow c$? ¿Qué forma toma en el caso de la fuerza de Lorentz?

2. Sin precisar las coordenadas, el lagrangiano libre de una partícula relativista es

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (99)$$

Usando coordenadas esféricas, demostrar que el hamiltoniano libre de una partícula relativista es

$$H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \sqrt{c^2 \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + (mc^2)^2}. \quad (100)$$

En particular, si el movimiento está restringido al plano $\theta = \frac{\pi}{2}$, es

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \sqrt{c^2 \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + (mc^2)^2}. \quad (101)$$

3. El lagrangiano de una partícula de masa m y carga e en un campo electromagnético caracterizado por potenciales \mathbf{A} y ϕ está dado por el lagrangiano de partícula libre más un término de interacción:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - e\phi(\mathbf{r}, t). \quad (102)$$

Mostrar que el hamiltoniano es

$$H = \sqrt{\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + (mc^2)^2} + e\phi, \quad (103)$$

donde el momento canónico \mathbf{P} está relacionado con el momento ordinario $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ a través de la relación

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (104)$$

Mostrar entonces que la ecuación de Hamilton–Jacobi se puede escribir como

$$\left(\nabla S - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\phi \right)^2 + (mc)^2 = 0. \quad (105)$$

4. Mediante el formalismo de ángulo–acción demostrar que el período de movimiento unidimensional de una partícula relativista en un potencial armónico $V = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ puede escribirse como

$$T = \frac{4}{c\omega} \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \frac{E - (E - mc^2) \sin^2 u}{\sqrt{(E + mc^2) - (E - mc^2) \sin^2 u}}. \quad (106)$$

A partir de la expresión anterior, demostrar que, para velocidades características mucho

menores que c , el período de oscilación es

$$T(a) \simeq T_0 \left(1 - \frac{3}{16} \frac{\omega^2 a^2}{c^2} \right), \quad (107)$$

donde a es la amplitud de la oscilación. Notar que no se necesita calcular la acción explícitamente, todo lo que se requiere para calcular el período es $\partial J / \partial E$.

5. Escribir en coordenadas esféricas el hamiltoniano de una partícula de masa m en un potencial coulombiano $V(r) = k/r$ ($k \neq 0$), restringiendo el movimiento al plano $\theta = \frac{\pi}{2}$. Mediante el método de Hamilton–Jacobi encontrar la ecuación de la órbita $r(\varphi)$. *Nota:* el problema se separa en tres casos: $(p_\varphi c)^2$ menor, mayor o igual que k^2 .