Guia 2 - Ecuaciones de Lagrange - Mecánica Clasica - Cátedra G.Mindlin

1er Cuatrimestre 2018

a. Ejemplos de ecuaciones de Lagrange

1. En la figura se muestra un esquema de un yoyo cilíndrico de masa m y radio R sostenido verticalmente por una cuerda sin masa. Un extremo de la misma se encuentra fijo en un punto y el otro enrollado alrededor del yoyo. Cuando se deja en movimiento el mismo cae por efecto de la gravedad rotando a medida que la cuerda se desenrolla. Escriba el Lagrangiano del sistema usando la distanca x como la coordenada generalizada. Encuentre las ecuaciones de Lagrange del movimiento y muestre que el cilindro se acelera hacia abajo con $\ddot{x} = 2g/3$.

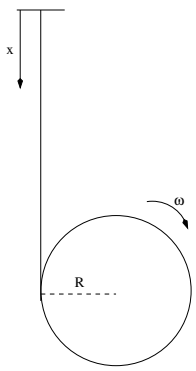

Figure 1: Problema 1

2. Una masa m se encuentra suspendida de una cuerda sin masa cuyo otro extremo se encuentra enrollado varias veces en un cilindro ubicado horizontalmente de radio R. El mismo tiene un momento de inercia I_{cm} y es libre de rotar en torno a un eje horizontal que pasa por su centro de masa. Usando una cordenada adecuada escriba el Lagrangiano del sistema y las ecuaciones de Lagrange del movimiento para luego encontrar la aceleración de la masa m.

3. Un carrito de masa m se encuentra montado sobre rieles dentro de un carro más grande. Ambos se encuentran unidos por un resorte de constante elástica k de forma tal que la posición de equilibrio del carrito es en la mitad del carro grande. La distancia del carrito respecto de su posición de equilibrio es x mientras que la posición del carro grande respecto de un origen fijo a la tierra es X como se muestra en la figura. El carro grande se fuerza a oscilar de forma tal que $X(t) = Acos(\omega t)$ con A y ω fijos. Escriba el Lagrangiano del carro pequeño y demuestre que la ecuación de Lagrange es:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = Bcos(\omega t) \tag{1}$$

con ω_0 es la frecuencia natural de oscilación $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ y B es constante.

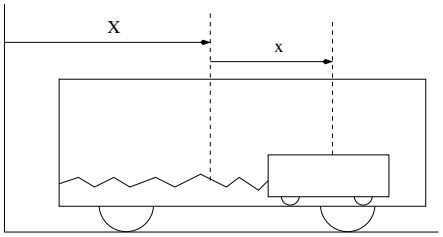

Figure 2: Problema 3

4. Encuentre el lagrangiano de los sistemas de la figura 3.

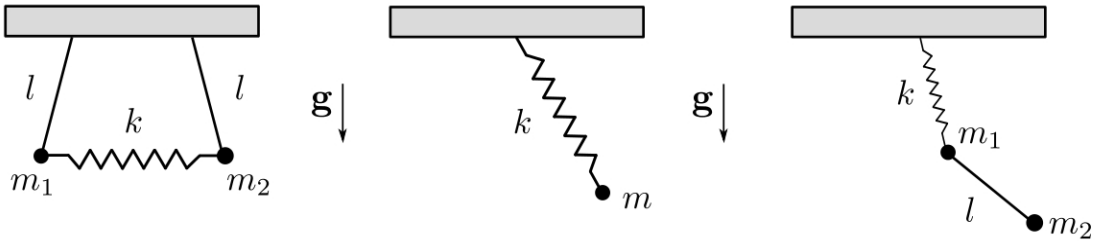

Figure 3: Problema 3

5. Un péndulo simple (masa m y largo l) se encuentra colgando del punto P ubicado en el borde de un volante (centro O y radio R) que es forzado a rotar con velocidad angular ω constante como muestra la figura. Escriba el Largrangiano y encuentre la ecuación del movimiento para el ángulo ϕ. (ayuda: sea cuidadoso al escribir la energía cinética, una forma segura de hacerlo es primero encontrar la posición de la masa en función del tiempo y luego derivarla). Corrobore que su resultado tenga sentido considerando el caso especial de $\omega = 0$ considerando que a $t = 0$ la masa esta ubicada a la derecha y a la misma altura que el centro O.

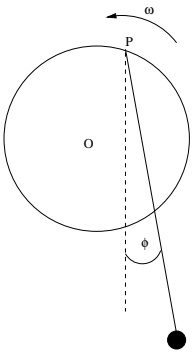

Figure 4: Problema 4

6. Un péndulo simple (masa M y largo l) está suspendido de un carro (masa m) que puede oscilar ya que se encuentra unido a un resorte (de constante elástica k) como muestra la figura.

   - Escriba el Lagrangiano en términos de dos coordenadas generalizadas x (extensión del resorte respecto a su posición de equilibrio) y ϕ y Encuentre las dos ecuaciones de Lagrange.
   - Simplifique las ecuaciones para el caso en que ambas coordenadas son pequeñas.

7. Considere una partícula de masa m enhebrada sin fricción en un alambre de forma parabólica que se está haciendo girar en torno a un eje vertical como muestra la figura. Use coordenadas cilíndricas de

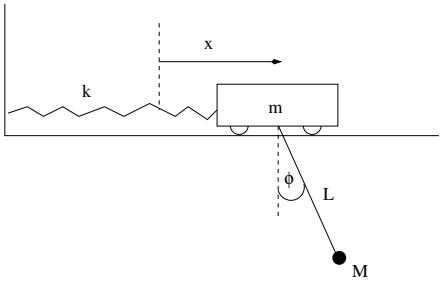

Figure 5: Problema 5

forma tal que la ecuación de la parábola quede $z = k\rho^2$. Escriba el Lagrangiano en términos de ρ como coordenada generalizada. Encuentre la ecuación del movimiento de la masa y determine cuáles son las posiciones de equilibrio, es decir, los valore de ρ para los cuales la masa queda fija sin deslizar ni para arriba ni para abajo. Discuta la estabilidad de los puntos de equilibrio hallados.

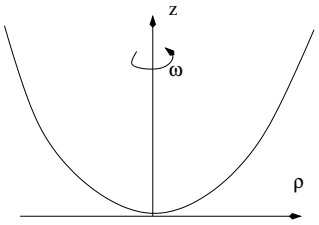

Figure 6: Problema 6

8. Bajo la acción de la gravedad, una partícula de masa m se desliza sin rozamiento sobre una supeficie cónica definida por $\theta = \alpha$, donde θ es el ángulo polar de las coordenadas esféricas.

   (a) Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula utilizando como coordenadas generalizadas el ángulo ϕ y el radio r de las coordenadas esféricas habituales. Encuentra alguna coordenada cíclica? En caso de encontrarla, qué cantidad se conserva? lo vincula con alguna magnitud física?.

   (b) Usando la conservación hallada en el ítem anterior halle el potencial efectivo unidimensional equivalente. Muestre que las órbitas circulares son posibles y halle la velocidad de la partícula en tales órbitas.

   (c) Usando la conservación de energía mecánica y el potencial efectivo unidemsional, encuentre el r máximo y el r mínimo para el caso en que $\alpha = 30$ y las condiciones iniciales sean $r(0) = a$, $\dot{r}(0) = 0$, $\dot{\phi}(0)^2 = 4\sqrt{3}g/a$ (ayuda: note que si presta atención al enunciado, uno de los dos r pedido es dato).

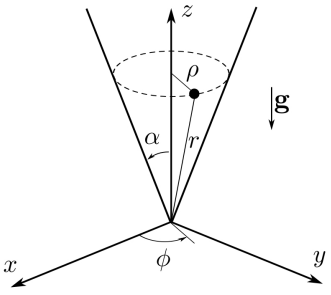

Figure 7: Problema 7

9. La figura muestra una circunferencia de alambre horizontal que es forzada a rotar con velocidad angular ω en torno a un eje vertical que pasa por el punto A. Una bolita de masa m se encuentra enhebrada en el alambre capaz de moverse libremente. Su posición es descripta por el ángulo ϕ que forma la bolita con el centro del diámetro AB. Encuentre el Lagrangiano del sistema usando ϕ como coordenada generalizada. Use la ecuación de Lagrange para probar que la bolita oscila alrededor del punto B al igual que un péndulo simple. Para el caso de pequeñas oscilaciones demuestre cuál es la frecuencia de oscilación. [ayuda: recuerde que siempre es útil escribir primero la posición y luego derivar la velocidad.]

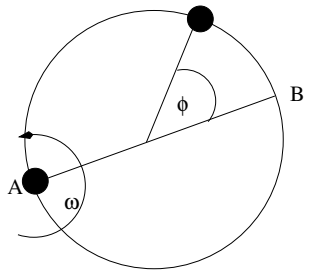

Figure 8: Problema 3

b. Leyes de conservación

10. El teorema de Noether encuentra una conexión entre los invariantes de un sistema y las leyes de conservación. Demuestre que la invarianza rotacional del Lagrangiano implica la conservación del momento angular total. Para ello suponga el Lagrangiano de un sistema de N-partículas es invariante ante rotaciones respecto a un eje. Sin perder generalidad puede tomar a ese eje como el eje z y probar que el Lagrangiano es invariante cuando todas las partículas rotan simultáneamente de (r_o, θ_o, ϕ_o) a $(r_o, \theta_o, \phi_o + \epsilon)$, el mismo ϵ para todas las partículas y por lo tanto demostrar que:

$$\sum_{o=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \phi_o} = 0. \tag{2}$$

Use luego las ecuaciones de Lagrange para demostrar que el resultado anterior implica que el momento angular L_z se conserva en torno al eje de simetría. En particular si el Lagrangiano es invariante ante rotaciones en torno a cualquier eje.

11. Muestre que para considerar invarianzas ante transformaciones rígidas en el Lagrangiano alcanza con estudiar cuál es el comportamiento del potencial. De esta manera analice las magnitudes conservadas a partir de las simetrías del lagrangiano en un sistema de tres masas, m_1, m_2 y m_3 enhebradas en un aro circular. Las tres masas interactúan mediante ciertos resortes especiales cuyo potencial es $V(\theta_i - \theta_j) = 1/2k(\theta_i - \theta_j)^2$, con $i, j = 1, 2, 3$ y k una constante.

12. Suponga una partícula de masa m sometida a un potencial externo V. Considere los casos en que el potencial presenta las siguientes invariancias (con δ arbitrario pero pequeño):

    (a) $V(x, y, z) = V(x, y, z + \delta)$
    (b) $V(x, y, z) = V(x + 3\delta, y - 2\delta, z + \delta/2)$
    (c) $V(x, y, z) = V(x, y + z\,\delta, z - y\,\delta)$
    (d) $V(\rho, \theta, \phi) = V(\rho + \delta, \theta, \phi)$
    (e) $V(\rho, \phi, z) = V(\rho, \phi + \delta, z + 5a\,\delta/8)$

    Encontrar en cada caso, si existen, constantes de movimiento relacionadas con estas invariancias.

13. Sea $F = F(q_1, ..., q_t)$ una función de las coordenadas generalizadas de un sistema cuyo Lagrangiano $L(q_1, ..., q_n, \dot{q_1}, ..., \dot{q_n}, t)$. Pruebe que los dos Lagrangianos L y $L' = L + dF/dt$ dan lugar a las mismas ecuaciones del movimiento.

c. Multiplicadores de Lagrange

14. Una masa m_1 se encuentra en reposo sobre un plano horizontal sin rozamiento conectada con una masa m_2 mediante una soga como muestra la figura. Use las coordenadas x e y como las distancias de las masas a la polea, se cumple entonces la relación que $f(x, y) = x + y = const$. Escriba las ecuaciones de Lagrange modificadas y resuélvala junto con la ecuación de vínculo para $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ y el multiplicador de Lagrange λ. Encuentre la tensión de la cuerda entre las dos masas y compare sus respuestas con la resolución del problema vía las ecuaciones de Newton.

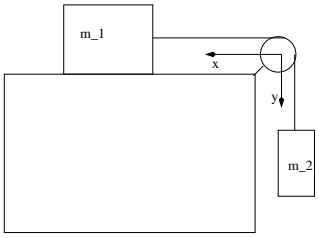

Figure 9: Problema 10

15. Escriba el Lagrangiano de un péndulo simple en términos de las coordenadas rectangulares x e y. Estas coordenadas están restringidas a cumplir el vínculo que impone la soga que es $f(x, y) = \sqrt{(}x^2 + y^2) = l = const$. Escriba entonces las dos ecuaciones de Lagrange modificadas, compárelas con las ecuaciones de Newton y muestre que el multiplicador es, a menos de un signo, la tensión de la cuerda.

16. Una masa m se desliza sobre una semiesfera de radio R. Escriba las dos ecuaciones de Lagrange modificadas en coordenadas polares (r, θ) y encuentre la fuerza de contacto entre la superficie y la masa. Diga para qué valor de θ la masa se separa de la superficie, considerando que se la suelta desde θ_0 con $\dot{\theta}_0 = 0$.

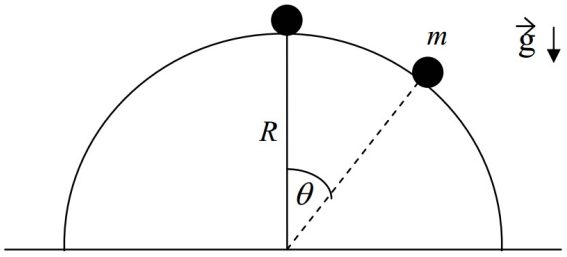

Figure 10: Problema

d. Lagrangiano de una carga en un campo electromagnético

17. El Lagrangiano de una partícula cargada moviéndose en un campo electromagnético está dado por

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q(V - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}),$$

donde q es la carga de la partícula, $\vec{A}$ es el potencial vector y V es el potencial escalar. Considere que una partícula de masa m y de carga q, se mueve por un campo campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\hat{z}$ en la dirección.

(a) Demuestre que en ese caso el lagrangiano se puede escribir como

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}qB\rho^2\dot{\phi}$$

(b) Encuentre las ecuaciones del movimiento a partir de ese lagrangiano

(c) Considere ahora que la masa se encuentra en reposo y fija en el borde de un disco de radio R orientado de forma tal que el eje que pasa por su centro coincide con eje z del campo magnético. Explique por qué si el campo magnético comienza a disminuir, el disco comenzará a girar. (Paradoja de Feynman)