Guia 6 - Cuerpo rígido - Mecánica Clásica - Cátedra G.Mindlin

1er Cuatrimestre 2018

Introducción: Cálculo de momentos de inercia y tensor de inercia

1. Cinco bolitas de igual masa se encuentran ubicadas en los 5 vértices de una pirámide de base cuadrada de lado L. Considere la base en el plano xy y que el ápice de la misma se encuentra atravesado por el eje z a una distancia H del origen. Calcule en centro de masa de dicho sistema.

2. Considere un alambre angosto de longitud L ubicado de forma vertical sobre el eje y con $L/2$ por encima y $-L/2$ por debajo del eje x. Luego dicho alambre es forzado a torcerse hacia la izquierda de forma de generar un arco de circunferencia de radio R tangente en su punto medio al eje y. Calcule la posición del CM. Qué sucede para los casos en que $R \to \infty$ y $2\pi R = L$.

3. El momento de inercia de una distribución de masa continua es con densidad ϱ está determinado por el pasaje de la sumatoria para un sistema discreto de masas a la integral en volumen $\int \rho^2 dm = \int \rho^2 \varrho dv$, donde ρ es la distancia al eje de rotación. Calcule el momento de inercia de un cilindro circular uniforme de radio R y masa M respecto al eje de rotación ubicado en su eje. Explique porque los productos de inercia son 0.

4. Encuentre el momento de inercia de una esfera sólida uniforme de masa M y radio R para rotaciones respecto a su diámetro. Repita lo mismo para una esfera hueca con radio interior a y radio exterior b.

5. Considere el sistema del problema 5 de la guía de repaso mostrado en la figura. Calcule el momento de inercia y los productos de inercia respecto a un eje de rotación en la dirección de z, para ello ubique a las masas en el plano yz. Calcule el momento angular del sistema considerando la rotación respecto al eje z fija y compare con el resultado obtenido en la guía de repaso.

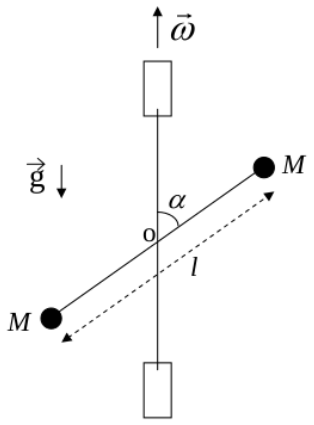

Figure 1: Esquema del sistema del problema 5

6. Un cuerpo rígido consiste en tres masas enganchadas por barras de masa despreciable de la siguiente manera: una masa m en la posición $(a, 0, 0)$, otra $2m$ en $(0, a, a)$ y la última $3m$ en $(0, a, -a)$. Calcule el tensor de inercia I, y luego encuentre los momentos principales de inercia y un conjunto ortogonal de ejes principales.

7. Un triángulo metálico plano y angosto se encuentra en plano xy con los vértices en $(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 0)$. La densidad de masa (masa/área) es $\sigma = 24$ (la distancia y la masas están medidas en unidades inespecíficas y el valor de 24 es arbitrario para que las cuentas queden más simples). Encuentre el momento de inercia I del triángulo, luego encuentre los momentos principales y los ejes correspondientes.

8. Pruebe que los momentos principales de un cuerpo rígido satisfacen $\lambda_3 \leq \lambda_1 + \lambda_2$. [ayuda: utilice las integrales que definen dichos momentos]. Indique para qué geometría se cumple la igualdad.

Dinámica del Cuerpo Rígido

9. Un caso particular de movimiento del trompo simétrico visto en clase es cuando el trompo gira sobre un eje vertical. Analice el movimiento del mismo de la siguiente manera:

   (a) Observando el potencial efectivo

   $$U_{eff} = \frac{(L_z - L_3 cos\theta)^2}{2\lambda_1 sin^2\theta} + \frac{L_3^2}{2\lambda_3} + MRgcos\theta$$

   demuestre que si en algún tiempo $\theta = 0$ entonces $L_3 = L_z$.

   (b) Sabiendo que $L_3 = \lambda_3\omega_3$, haga un desarrollo de Taylor a segundo orden del potencial efectivo alrededor de $\theta = 0$ y demuestre que para valores de $\omega_3 > \omega_{min}$ la rotación a $\theta = 0$ es estable (con $\omega_{min} = 2\sqrt{MgR\lambda_1/\lambda_3^2}$), pero que si $\omega_3 < \omega_{min}$ es insestable.

10. Se tienen dos placas de lados a y b cuyo espesor es despreciable. Una de ellas está fija por su centro de masa a un eje que gira con velocidad angular $\Omega = cte$. La otra placa está unida a la anterior por una bisagra ideal que le permite moverse como se indica en la figura. Determinar:

    (a) El Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento en ausencia de gravedad.

    (b) Existe algún punto de equilibrio estable?

    (c) El Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento con gravedad.

    (d) Existe ahora algún punto de equilibrio estable?

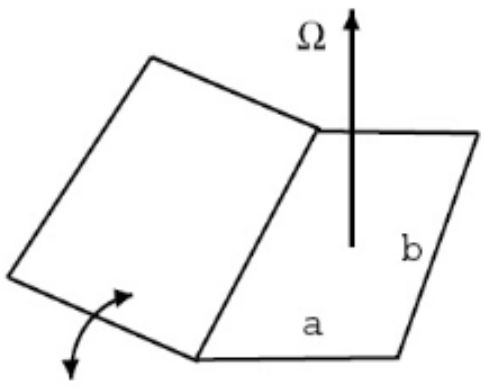

Figure 2: Esquema del sistema del problema 5

11. Si se arroja un objeto con los tres momentos principales de inercia distintos,de tal manera que gire alrededor de un eje principal con momento de inercia máximo o mínimo, el movimiento es relativamente estable, pero si se lo arroja tratando que gire alrededor del eje principal con momento intermedio, el movimiento es muy irregular ya que se ven grandes cambios en la posición del eje de rotación respecto del cuerpo (puede hacer la prueba con un borrador). Demuéstrelo utilizando las ecuaciones de Euler: muestre que cuando un cuerpo rígido en un campo gravitacional uniforme rota alrededor de un eje con momento de inercia máximo o mínimo, el movimiento es estable y es inestable si el eje corresponde al momento intermedio.[ayuda: suponga que inicialmente tiene la velocidad angular casi paralela a un eje principal y vea como evolucionan las componentes chicas].

12. Un cilindro circular sólido de mas m, radio a y largo l, está suspendido de un eje transversal a través de su centro de masa (ver figura). Este eje gira con velocidad angular constante Ω. Suponiendo $l > \sqrt{3}a$, encontrar las posiciones de equilibrio estable y las frecuencias de oscilación para pequeños apartamientos de la misma.

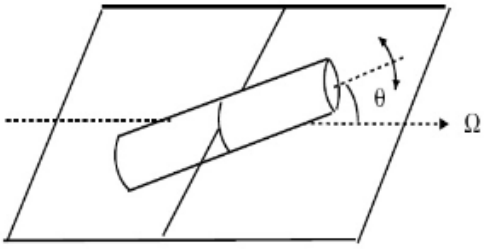

Figure 3: Esquema del sistema del problema 7

13. Dada una barra de longitud l y masa m cuyo extremo puede deslizar a lo largo del eje z y a su vez puede girar en torno a él mientras está apoyada sobre una esfera de radio a como indica la figura. Determinar:

    (a) El lagrangiano de la barra

    (b) Las ecuaciones del movimiento

    (c) Magnitudes conservadas

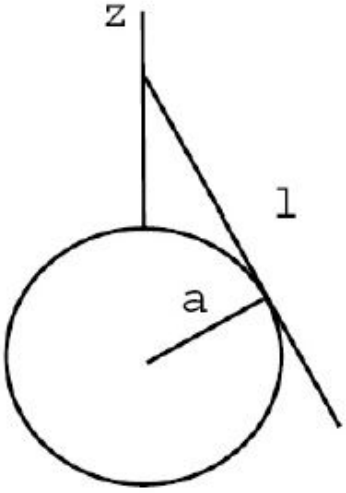

Figure 4: Esquema del sistema del problema 13

14. Un giróscopo rota alrededor del eje x_3 como indica la figura con velocidad angular $\Omega_3 =$. Su momento de inercia axial es I_3 y el momento de inercia alrededor de cualquier eje en el plano x_1x_2 es I. Inicalmente el volante está en posición vertical ($\theta(0) = \pi/2$) y además $phi(0) = \dot{\phi}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. Un peso mg se cuelga del eje x_3 a una distancia del origen d. Usando las ecuaciones de Euler:

   (a) Encuentre las ecuaciones diferenciales para Ω_1, Ω_2 y Ω_3 en términos de θ, ϕ y ψ y sus derivadas.

   (b) Linealizar las ecuaciones obtenidas suponiendo que el θ $\pi/2$ y las velocidades $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$ son pequeñas.

   (c) Resuelva el sistema obtenido en el item b) e interprete los resultados [ayuda: eliminar en ambas ecuaciones los factores $sin(\omega t)$ usando la variable compleja $\lambda = \theta + i\phi$].

   (d) Establecer los límites de la aproximación.

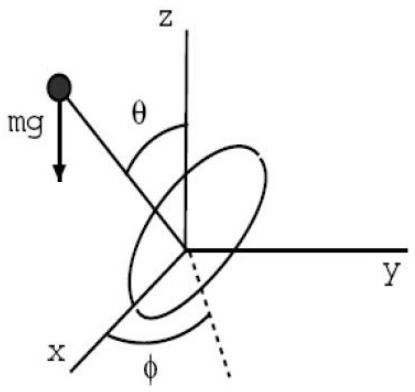

Figure 5: Esquema del giróscopo