Guia 7 - Hamilton - Mecánica Clásica - Cátedra G.Mindlin

1er Cuatrimestre 2018

1. Considere la máquina de Atwood de la figura, pero suponga que la polea es un disco de masa uniforme de masa M y radio R. Usando x como la coordenada generalizada, escriba el Lagrangiano, el momento generalizado p y el Hamiltoniano $H = p\dot{x} - L$. Encuentre las ecuaciones de Hamilton y úselas para encontrar la aceleración.

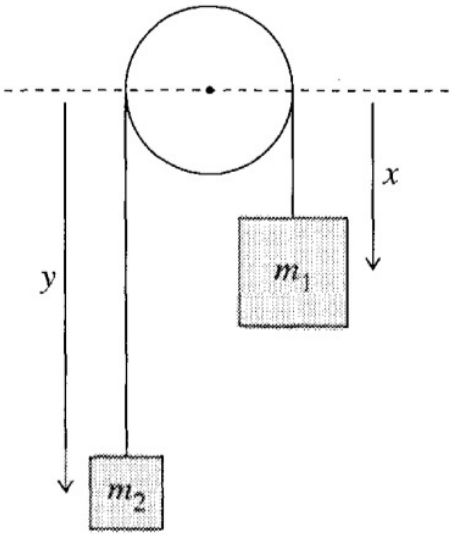

Figure 1: Esquema del sistema del problema 1

2. Una bolita de masa m se encuentra enhebrada en un alambre que se enrolla en forma helicoidal cumpliendo la relación en coordenadas polares (ρ, ϕ, z) de $z = c\phi$ y $\rho = R$, con R y c constantes. El eje z está en la vertical en dirección hacia arriba y la gravedad en el mismo eje en dirección hacia abajo. Usando ϕ como coordenada generalizada, escriba la energía cinética T y la potencial U y luego escriba el Hamiltoniano H como una función de ϕ y del momento conjugado p. Escriba las ecuaciones de Halmiton y resuelva para $\ddot{\phi}$ y por lo tanto encuentre también $\ddot{z}$. Explique el resultado en términos de la mecánica Newtoneana y discuta el caso especial donde $R = 0$.

3. Una carrito de una montaña rusa de masa m se mueve a lo largo de un riel sin rozamiento dispuesto en el plano xy (x coordenada horizontal e y vertical hacia arriba). La altura del riel se puede parametrizar como cierta función de x como: $y = h(x)$. Usando x como coordenada generalizada, escriba el Lagrangiano, el momento generalizado p y el Hamiltoniano $H = p\dot{x} - L$ (como función de x y p). Encuentre las ecuaciones de Hamilton

4. Sea una partícula de masa m moviéndose en dos dimensiones sujeta a una fuerza $F = -k\hat{x} + K\hat{y}$, donde k y K son constantes positivas. Escriba el Hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton usando x e y como coordenadas generalizadas. Resuelva y describa el movimiento resultante.

5. La forma simple del Hamiltoniano $H = T + U$ es solo válida si las coordenadas generalizadas son naturales (i.e, la relación entre las coordenadas generalizadas y las cartesianas es independiente del tiempo). Sin embargo si las coordenadas no son naturales dicha forma no es válida y por ende el Hamiltoniano se calcula por definición. Pruebe que para el caso de una bolita de masa m enhebrada en un riel horizontal unidimensional sin rozamiento rotando con velocidad ω respecto a un eje vertical que pasa por el centro del riel, la forma simple no es válida.

6. Considere una bolita de masa m cuyo movimiento está restringido a moverse en un cilindro sin rozamiento de radio R, que en coordenadas polares (ρ, ϕ, z) se escribe como $\rho = R$. La bolita se encuentra sometida a una fuerza externa $\overrightarrow{F} = -kr\hat{r}$, donde k es una constante positiva y r es la distancia al origen. Usando z y ϕ como coordinadas generalizadas, encuentre el hamiltoniano H, escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton. Describa el movimiento.

7. Considere una masa confinada a moverse en la superficie de un cono como el ejercicio de la guía de Lagrange pero considere coordenadas cilíndricas como indica la figura.

   (a) Escriba el Hamiltonieanno del sistema considerando usando a z y ϕ como variables generalizadas.

   (b) Encuentre las ecuaciones de Hamilton y pruebe que p_ϕ es constante.

   (c) Demuestre que hay una solución donde la masita realiza un movimiento circular a un z_0 constante a velocidad angular $\dot{\phi}$ constante. A su vez explique cualitativamente por qué el movimiento está confinado entre un z_min y z_max.

   (d) Use las ecuaciones de movimiento y pruebe que el movimiento circular es una solución estable. Para ello demuestre que si las órbitas son $z = z_0 + \epsilon$ con pequeño, éste oscila en torno a 0.

   (e) Muestre que la frecuencia de oscilación es $\omega = \sqrt{3}\dot{\phi} sin\alpha$ (con α el ángulo de cono $\tan\alpha = c$). Encuentre para cuál valor del ángulo α la frecuencia de oscilación ω es igual a la velocidad angular $\dot{\phi}$.

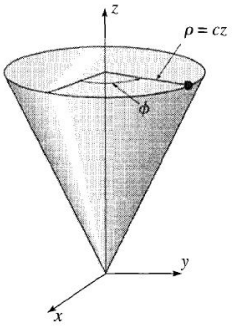

Figure 2: Esquema del sistema del problema 3

8. Considere el péndulo físico que muestra la figura cuyo momento de inercia respecto al centro de masa es I_0.

   (a) Escriba el Hamiltoniano del sistema. [ayuda: considere el cuerpo rígido y use como coordenada generalizada θ].

   (b) Encuentre las ecuaciones de Hamilton del sistema. Encuentre el período para el caso de pequeñas oscilaciones.

   (c) Represente el sistema en un diagrama de fases pertinente $(q; P_q)$. Indique los distintos movimientos posibles que muestra el diagrama. [ayuda: escriba P_q en función de q y note qué tipo de gráfico obtiene para pequeñas oscilaciones, luego encuentre que tipo de gráfico encuentra para todo valor del ángulo].

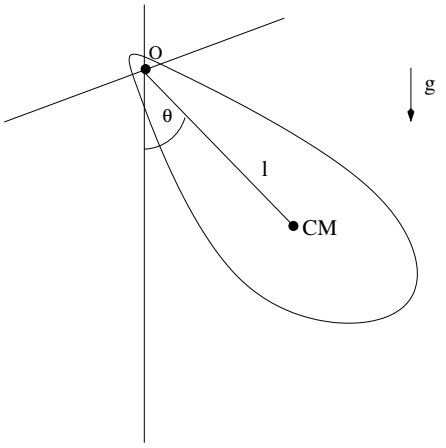

Figure 3: Esquema del sistema del problema 3

9. Considere una masa m moviéndose en dos dimensiones bajo el efecto de una fuerza sencilla F que no depende de r ni de t. Encuentre el potencial $U(r)$ y el Hamiltoniano. Demuestre que usando coordenadas rectangulares x e y con x en la dirección de la fuerza F, la coordenada y es ignorable. Demuestre asimismo que si usa coordenadas rectangulares pero la fuerza no coincide con ninguno de los ejes, entonces ninguna coordenada es ignorable.

10. Considere la máquina de Atwood modificada que muestra la figura. Las dos masas de la izquierda de igual masa m se encuentran unidas por un resorte sin masa de constante elástica k. La masa de la derecha tiene masa $M = 2m$ y la polea no tiene masa ni rozamiento. La coordenada x mide la extensión del resorte respecto a su posición de equilibrio, es decir que la extensión del mismo se puede escribir como $l_e + x$, donde l_e es la posición de equilibrio.

    - Demuestre que la energía potencial del sistema (elástica mas gravitatoria) es simplemente $U = \frac{1}{2}kx^2$, a diferencia de una constante que puede considerarse 0.
    - Encuentre los momentos conjugados para x e y y escriba el Hamiltoniano, indique, de haberlas, cuáles coordenadas son ignorables.
    - Escriba las 4 ecuaciones de Hamilton y resuelva el sistema dada las siguientes condiciones iniciales: la masa M se fija con todo el sistema en equilibrio con $y = y_0$, luego con M fijo todavía se tira de la masa m inferior una distancia x_0 y en el tiempo t se liberan las masas. Describa el movimiento y encuentre la frecuencia de oscilación de la coordenada x.

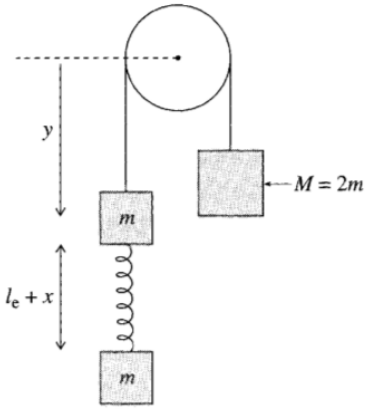

Figure 4: Esquema del sistema del problema 3