1. El Lagrangiano de un sistema de dos masas sometidas a una fuerza entre ellas viene dado como

$$\mathcal{L}(\bar{r}_1,\dot{\bar{r}}_1,\bar{r}_2,\dot{\bar{r}}_2,)=\frac{1}{2}m_1\dot{\bar{r}}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\bar{r}}_2^2-U(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)\,.$$

El posible redefinir dicho Lagrangiano en términos de la posición $\bar{R}$ del centro de masa y relativa $\bar{r}$ como

$$\bar{R}=\frac{m_1\bar{r}_1+m_2\bar{r}_2}{m_1+m_2}\,,\qquad \bar{r}=\bar{r}_1-\bar{r}_2\,,$$

lo que se relaciona con la posición $\bar{r}_1,\bar{r}_2$ de las partículas de forma que

$$\bar{r}_1=\bar{R}+\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\bar{r}\,,\qquad \bar{r}_2=\bar{R}-\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\bar{r}\,.$$

Reemplazando y definiendo M,μ como masa total y reducida, respectivamente, el Lagrangiano del sistema será

$$\mathcal{L}\left(\bar{R},\dot{\bar{R}},\bar{r},\dot{\bar{r}}\right)=\frac{1}{2}M\dot{\bar{R}}^2+\frac{1}{2}\mu\dot{\bar{r}}^2-U(r)\,,\qquad M=m_1+m_2\,,\qquad \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,.$$

Dado que el centro de masa es un sistema inercial, es posible considerar en el centro de masa tal que $\bar{R}\equiv 0$. Asimismo, el torque $\bar{\tau}_{cm}$ del centro de masa, reemplazando y usando $\bar{R}\equiv 0$, se podrá expresar como

$$\bar{\tau}_{cm}=\bar{\tau}_{1_{cm}}+\bar{\tau}_{2_{cm}}=\left(\bar{r}_{1_{cm}}\right)\times(\bar{F})+\left(\bar{r}_{2_{cm}}\right)\times(-\bar{F})=\frac{m_2}{M}\bar{r}\times\bar{F}+\frac{m_1}{M}\bar{r}\times\bar{F}=rF(\hat{r}\times\hat{r})=0\,,$$

de forma que el torque total $\bar{\tau}_{cm}$ en centro de masa es nulo $\forall\bar{r}$, luego el momento angular $\bar{L}_{cm}=\overline{cte}$, entonces

$$\bar{L}_{cm}=\bar{l}_{1_{cm}}+\bar{l}_{2_{cm}}=\left(\frac{m_2}{M}\bar{r}\right)\times\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)\dot{\bar{r}}+\left(-\frac{m_1}{M}\bar{r}\right)\times\left(-\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)\dot{\bar{r}}=\mu(\bar{r}\times\dot{\bar{r}})=\overline{cte}\,,$$

del mismo modo puede probarse que $\bar{\tau}_{1_{cm}}=\bar{\tau}_{2_{cm}}=0$ por separado, por lo que los momentos angulares por separado $\bar{l}_{1_{cm}},\bar{l}_{2_{cm}}$ también se conservan, pudiéndose asimismo verificar que

$$\bar{l}_{1_{cm}}=\left(\frac{m_1m_2^2}{M^2}\right)(\bar{r}\times\dot{\bar{r}})=\frac{m_2}{M}\bar{L}_{cm}\,,\qquad \bar{l}_{2_{cm}}=\left(\frac{m_1^2m_2}{M^2}\right)(\bar{r}\times\dot{\bar{r}})=\frac{m_1}{M}\bar{L}_{cm}\,.$$

También puede verificarse que el momento angular total $\bar{\tau}$ en cualquier punto del espacio también se anula pues

$$\bar{\tau}=\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2=\left(R\hat{R}+\frac{m_2}{M}r\hat{r}\right)\times(F\hat{r})+\left(R\hat{R}-\frac{m_1}{M}r\hat{r}\right)\times(-F\hat{r})=FR\left(\hat{R}\times\hat{r}\right)-FR\left(\hat{R}\times\hat{r}\right)=0\,,$$

por lo que también el momento angular total $\bar{L}$ en cualquier punto del espacio también se conserva, dado que F es una fuerza central entre los cuerpos, igual y opuesta. Sin embargo, puede verificarse ahora que, por separado los momentos angulares de cada partícula no se conservan, ya que $\bar{\tau}_1=-\bar{\tau}_2\neq 0$.

---

2. Usando el resultado del ejercicio anterior, el Lagrangiano entre dos partículas para el potencial central será

$$\mathcal{L}(\bar{r},\dot{\bar{r}})=T(\dot{\bar{r}})-U(\bar{r})=\frac{1}{2}\mu\dot{\bar{r}}^2-\frac{1}{2}k\bar{r}^2\Longrightarrow\mathcal{L}(x,\dot{x},y,\dot{y})=\frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}k(x^2+y^2)\,,$$

de lo que se puede plantear Euler-Lagrange y obtener las ecuaciones de movimiento en x,y como

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)=-kx-\mu\ddot{x}=0\,,\qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\right)=-ky-\mu\ddot{y}=0\,.$$

Para el problema, es posible plantear la solución del oscilador armónico en x,y, quedando que

$$x(t) = A_x \cos(\omega t) + B_x \sin(\omega t)\,, \qquad y(t) = A_y \cos(\omega t) + B_y \sin(\omega t)\,, \qquad \omega^2 = k/\mu,$$

el mismo sistema es posible representarlo en términos de $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$ resolviendo el sistema dado

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{A_x B_y - B_x A_y} \begin{pmatrix} B_y & -B_x \\ -A_y & A_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

para luego verificar, usando $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$, la ecuación de una elipse rotada.

$$\cos(\omega t) = \frac{B_y x - B_x y}{A_x B_y - B_x A_y}\,, \qquad \sin(\omega t) = \frac{-A_y x + A_x y}{A_x B_y - B_x A_y}\,, \qquad \left(\frac{B_y x - B_x y}{A_x B_y - B_x A_y}\right)^2 + \left(\frac{-A_y x + A_x y}{A_x B_y - B_x A_y}\right)^2 = 1\,.$$

La expresión puede mejorarse, sin pérdida de generalidad, si se considera que, en un tiempo inicial $t = 0$, se cumple que $x(0) = A_x$ y que $y(0) = 0$. Esto se cumple si $B_x = A_y = 0$ y equivale a posicionar los semiejes mayor y menor axialmente, pudiéndose representar así la ecuación de la elipse como

$$\cos(\omega t) = \left(\frac{x}{A_x}\right), \qquad \sin(\omega t) = \left(\frac{y}{B_y}\right), \qquad \left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{B_y}\right)^2 = 1\,.$$

---

3. Primeramente se busca verificar el potencial efectivo de interacción entre dos cuerpos interactuando gravitatoriamente. El Lagrangiano, tomando como referencia el centro de masa inercial ($\bar{R} \equiv \bar{0}$), vendrá dado en términos de la coordenada relativa $\bar{r}$, planteada en coordenadas polares, como

$$\mathcal{L}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2}\mu \dot{\bar{r}}^2 - U(r) = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - \left(-G\frac{\mu M}{r}\right),$$

aplicando Euler-Lagrange, se recupera la conservación del momento angular y la ecuación de movimiento, luego

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt}\left(\mu r^2 \dot{\phi}\right) = 0 \Longrightarrow l \equiv \mu r^2 \dot{\phi} = cte,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \left(\mu r \dot{\phi}^2 - G\frac{\mu M}{r^2}\right) - (\mu \ddot{r}) = \frac{l^2}{\mu r^3} - G\frac{\mu M}{r^2} - \mu \ddot{r} = 0\,.$$

La ecuación radial, luego de aplicar la conservación, es posible redefinirla en términos del potencial efectivo por

$$F_{ef} = \mu \ddot{r} = -G\frac{\mu M}{r^2} + \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{d}{dr}\left(-G\frac{\mu M}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}\right) = -\frac{d}{dr}\left(U_{ef}\right),$$

sabiendo que, para órbitas circulares, el radio permanece constante, se usa que $\ddot{r} \equiv 0$, por lo que dicho radio será

$$\frac{dU_{ef}}{dr} = G\frac{\mu M}{r^2} - \frac{l^2}{\mu r^3} = 0 \Longrightarrow r_c = \frac{l^2}{G\mu^2 M}\,.$$

Puede comprobarse que el radio r_c de orbita circular es estable analizando la derivada segunda como

$$\frac{d^2 U_{ef}}{dr^2} = -2G\frac{\mu M}{r^3} + 3\frac{l^2}{\mu r^4} \Longrightarrow \left.\frac{d^2 U_{ef}}{dr^2}\right|_{r = r_c} = \frac{l^2}{\mu r_c^4} > 0 \Longrightarrow r_c \; es\ mínimo\ de\ U_{ef}\ (estable)\,.$$

Alternativamente se puede aplicar sobre F_{ef} (o en forma equivalente sobre U_{ef}) pequeñas perturbaciones para analizar la estabilidad. Para ello se piensa que $r = r_c + \varepsilon$, siendo $\varepsilon \ll$, de forma que $\ddot{r} = \ddot{\varepsilon}$,

$$F(r) = F(r_c + \varepsilon) = F(r_c) + \left.\frac{dF}{dr}\right|_{rc} \cdot \varepsilon + \cdots \Longrightarrow \mu \ddot{\varepsilon} \approx \left(\frac{l^2}{\mu^2 r_c^3} - G\frac{M}{r_c^2}\right) - \left(3\frac{l^2}{\mu r_c^4} - 2G\frac{\mu M}{r_c^3}\right)\varepsilon\,,$$

reemplazando las relaciones halladas para r_c, es posible reescribir la ecuación del movimiento de $\varepsilon(t)$ como

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_\varepsilon^2 \varepsilon = \varepsilon_0 \,, \qquad \omega_\varepsilon^2 = 3\frac{l^2}{\mu r_c^4} - 2G\frac{\mu M}{r_c^3} = \frac{l^2}{\mu^2 r_c^4} \quad , \qquad \varepsilon_0 = \frac{l^2}{\mu^2 r_c^3} - G\frac{M}{r_c^2} = 0 \,,$$

de forma que la solución general a la anterior ecuación de movimiento, para pequeñas perturbaciones, será

$$\varepsilon(t) = A\cos(\omega_\varepsilon t + \varphi_\varepsilon) \ , \qquad \omega_\varepsilon = l/\mu r^2 \,,$$

pudiéndose comprobar que el periodo orbital y el de dichas oscilaciones es el mismo, es decir, $\dot{\phi}_c = \omega_\varepsilon$.

---

4. Considérese un sistema de dos astros bajo interacción gravitatoria. Usando la ecuación radial derivada en Euler-Lagrange, que el período es $T = 2\pi/\dot{\phi}$ y que $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ en el radio del semieje mayor ($r = a$), se llega a que

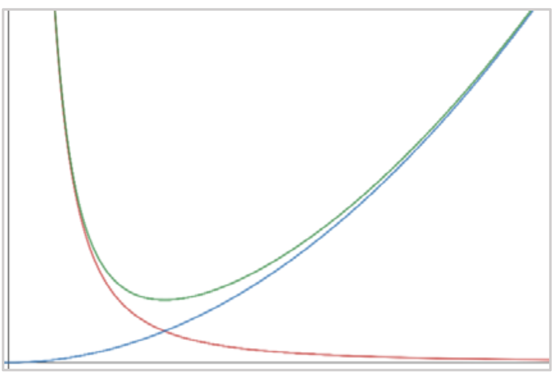
$$\mu\ddot{r} = \mu r\dot{\phi}^2 - G\frac{\mu M}{r^2} = \mu r\frac{4\pi^2}{T^2} - G\frac{\mu M}{r^2} \Longrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 \Longrightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = C \,,$$

la cual es exacta, y cuya constante C depende de la suma de masas de ambos astros. Dicha constante C difiere de la constante C_K de la tercera ley de Kepler, pues esta última aproxima $M \approx M_s$ (con M_s la masa del sol). Se contrasta la diferencia entre el valor exacto C y de Kepler C_K usando las masas de Júpiter M_j y del Sol M_s, luego

$$C = \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{G(M_j + M_s)} \approx 9.4050 \times 10^{-20} \,, \qquad C_K = \frac{4\pi^2}{GM_s} \approx 9.4144 \times 10^{-20} \,.$$

---

5. Se tiene un potencial dado por $U = kr^2/2$, luego el Lagrangiano vendrá escrito como



$$\mathcal{L}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - \left(\frac{kr^2}{2}\right),$$

aplicando Euler-Lagrange se puede nuevamente verificar que el momento angular l se conserva como $l \equiv \mu r^2\dot{\phi} = cte$. Esto permite resolver en forma unidimensional la restante ecuación

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = \left(\mu r\dot{\phi}^2 - kr\right) - (\mu\ddot{r}) = \frac{l^2}{\mu r^3} - kr - \mu\ddot{r} = 0 \,.$$

Reescribiendo la ecuación y considerando la fuerza efectiva F_{ef} derivada de un potencial efectivo U_{ef} se obtiene

$$\mu\ddot{r} = \frac{l^2}{\mu r^3} - kr \Longrightarrow F_{ef} = -\frac{d}{dr}\left(U_{ef}\right) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{kr^2}{2}\right) \Longrightarrow U_{ef} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{kr^2}{2},$$

de lo que se observa que U_{ef} crece infinitamente hacia $r \to 0$ o $r \to \infty$, hallándose un mínimo r_0 de orbita circular

$$\left.\frac{dU_{ef}}{dr}\right|_{min} = -\frac{l^2}{\mu r^3} + kr = 0 \Longrightarrow r_0 = \sqrt[4]{l^2/k\mu} \,,$$

correspondiente al mínimo posible de energía. A mayores niveles de energía se obtendrá órbitas elípticas de radios r_1, r_2 mínimo y máximo. Para el caso de la órbita circular de radio r_0, el periodo orbital se escribirá como

$$T_0 = \frac{2\pi}{\dot{\phi}_0} = \frac{2\pi\mu}{l}r_0^2 = \frac{2\pi\mu}{l}\sqrt{\frac{l^2}{k\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} \,.$$

Por último, se analiza la naturaleza de las órbitas para pequeños apartamientos ε de la órbita circular, luego

$$F(r) = F(r_c + \varepsilon) = F(r_c) + \left.\frac{dF}{dr}\right|_{rc} \cdot \varepsilon + \cdots \Longrightarrow \mu\ddot{\varepsilon} \approx \left(\frac{l^2}{\mu r_0^3} - kr_0\right) - \left(3\frac{l^2}{\mu r_0^4} + k\right)\varepsilon \,,$$

reemplazando las relaciones halladas para r_c, es posible reescribir la ecuación del movimiento de $\varepsilon(t)$ como

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_\varepsilon^2 \varepsilon = \varepsilon_0 \ , \qquad \omega_\varepsilon^2 = 3\frac{l^2}{\mu r_0^4} + k = \frac{4l^2}{\mu^2 r_0^4} \ , \qquad \varepsilon_0 = \frac{l^2}{\mu r_0^3} - k r_0 = 0 \ ,$$

de forma que la solución general a la anterior ecuación de movimiento, para pequeñas perturbaciones, será

$$\varepsilon(t) = A\cos(\omega_\varepsilon t + \varphi_\varepsilon) \ , \qquad \omega_\varepsilon = 2l/\mu r^2 \ ,$$

pudiéndose comprobar que el periodo de las oscilaciones es el doble que el orbital, es decir, $\omega_\varepsilon = 2\dot{\phi}_c$.

---

6. Se tiene un sistema de dos partículas, la primera sometida a un potencial $U_1 = k\bar{r}_1^2/2$, la segunda a un potencial $U_2 = k\bar{r}_2^2/2$, mientras que ambas interactúan con un potencial $U = \alpha k \bar{r}^2/2$. El Langrangiano del sistema será

$$\mathcal{L}(\bar{r}_1, \dot{\bar{r}}_1, \bar{r}_2, \dot{\bar{r}}_2,) = \frac{1}{2}m_1\dot{\bar{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\bar{r}}_2^2 - \frac{1}{2}k\bar{r}_1^2 - \frac{1}{2}k\bar{r}_2^2 - \frac{1}{2}\alpha k \bar{r}^2 \ .$$

Usando los resultados del problema (1) es posible reescribir el sistema en términos de la posición del centro de masa $\bar{R}$ y la posición relativa $\bar{r}$, obteniéndose que las posiciones de las partículas quedarán reescritas como

$$\bar{r}_1 = \bar{R} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)\bar{r} \ , \qquad \bar{r}_2 = \bar{R} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)\bar{r} \ ,$$

de forma que, reemplazando en el Lagrangiano, éste vendrá escrito en coordenadas $\bar{R}, \bar{r}$ como

$$\mathcal{L}\left(\bar{R}, \dot{\bar{R}}, \bar{r}, \dot{\bar{r}}\right) = \frac{1}{2}M\dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\bar{r}}^2 + k\bar{R}^2 + \frac{1}{2}k\left(2\frac{\mu}{M} - \alpha - 1\right)\bar{r}^2 + k\left(\frac{m_2 - m_1}{M}\right)\bar{R}\cdot\bar{r} \ ,$$

considerando que ambas partículas tienen igual masa $m = m_1 = m_2$, el Lagrangiano se simplificará como

$$\mathcal{L}\left(\bar{R}, \dot{\bar{R}}, \bar{r}, \dot{\bar{r}}\right) = m\dot{\bar{R}}^2 + \frac{m}{4}\dot{\bar{r}}^2 + k\bar{R}^2 - \frac{1}{2}k\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\bar{r}^2 \ ,$$

asimismo, reemplazando en coordenadas cartesianas del centro de masa y posición relativa X, Y, x, y se tiene que

$$\mathcal{L} = \left(m\dot{X}^2 + kX^2\right) + \left(\frac{m}{4}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x^2\right) + \left(m\dot{Y}^2 + kY^2\right) + \left(\frac{m}{4}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)y^2\right)$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange para X, x y Y, y son indistintas, tomando coordenadas arbitrarias Z, z se tiene

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{Z}} = 2kZ - 2m\ddot{Z} = 0 \Longrightarrow \ddot{Z} = \omega_0^2 Z \ , \quad \left(\omega_0^2 = \frac{k}{m}\right),$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = -k\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)z + \frac{m}{2}\ddot{z} = 0 \Longrightarrow \ddot{z} = \omega_1^2 z \ , \quad \left(\omega_1^2 = \omega_0^2(2\alpha + 1) = \frac{k}{m}(2\alpha + 1)\right).$$

Primeramente, se resuelven las ecuaciones correspondientes al centro de masa, con dadas condiciones iniciales

$$X(0) = X_0 \ , \qquad \dot{X}(0) = 0 \ , \qquad Y(0) = 0 \ , \qquad \dot{Y}(0) = \dot{Y}_0 \ ,$$

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_A) \Longrightarrow X(t) = X_0\cos(\omega_0 t) \Longrightarrow \cos(\omega_0 t) = \frac{X}{X_0} \ ,$$

$$Y(t) = B\sin(\omega_0 t + \varphi_B) \Longrightarrow Y(t) = \left(\frac{\dot{Y}_0}{\omega_0}\right)\sin(\omega_0 t) \Longrightarrow \sin(\omega_0 t) = \frac{Y}{\dot{Y}_0^2/\omega_0^2} \ ,$$

lo que permite recuperar que X, Y del centro de masa describen un movimiento elíptico en el tiempo dado por

$$\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = \frac{X^2}{X_0^2} + \frac{Y^2}{\dot{Y}_0^2/\omega_0^2} = 1 \ .$$

Usando la misma estrategia para las coordenadas relativas, con triviales condiciones iniciales, se llega también a

$$\cos^2(\omega_1 t) + \sin^2(\omega_1 t) = \frac{x^2}{x_1^2} + \frac{x^2}{\dot{x}_1^2/\omega_1^2} = 1 \,.$$

---

7. Se tienen dos partículas acopladas por un resorte de longitud natural l en un plano, el Lagrangiano será

$$\mathcal{L}(\bar{r}_1, \dot{\bar{r}}_1, \bar{r}_2, \dot{\bar{r}}_2,) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\bar{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\bar{r}}_2^2 - \frac{1}{2} k(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2| - l)^2 \,,$$

en coordenadas $\bar{R}, \bar{r}$ del centro de masa y posición relativa de las partículas quedará como

$$\mathcal{L}\left(\bar{R}, \dot{\bar{R}}, \bar{r}, \dot{\bar{r}}\right) = \frac{1}{2} M \dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\bar{r}}^2 - \frac{1}{2} k(|\bar{r}| - l)^2 \,,$$

asimismo, expresando las coordenadas del centro de masa en cartesianas y la relativa en polares quedará que

$$\mathcal{L}\left(\dot{\bar{X}}, \dot{\bar{Y}}, \bar{r}, \dot{\bar{r}}\right) = \frac{1}{2} M\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \frac{1}{2} \mu\left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2\right) - \frac{1}{2} k(r - l)^2 \,.$$

La resolución por Euler-Lagrange del centro de masa deriva en que éste es un sistema inercial, luego

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = M\ddot{X} = 0 \Longrightarrow X(t) = \dot{X}_0 t + X_0 \,, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = M\ddot{Y} = 0 \Longrightarrow Y(t) = \dot{Y}_0 t + Y_0 \,,$$

Tomando la ecuación angular de Euler-Lagrange para la posición relativa se obtiene la conservación de L como

$$\frac{d}{dt}\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\phi}} - \frac{d\mathcal{L}}{d\phi} = \frac{d}{dt}\left(\mu r^2 \dot{\phi}\right) = 0 \Longrightarrow L = \mu r^2 \dot{\phi} = cte \,,$$

mientras que la ecuación radial de movimiento, reemplazando con la conservación de L, quedará como

$$\frac{d}{dt}\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{r}} - \frac{d\mathcal{L}}{dr} = \mu\ddot{r} - \mu r\dot{\phi}^2 + k(r - l) = \mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} + k(r - l) = 0 \,.$$

Para el caso en que $r \equiv cte$ (órbita circular), entonces también $\dot{\phi} = cte$ (conservación del momento angular). Luego la ecuación radial de movimiento quedará reescrita como

$$\mu\ddot{r} = \mu r\dot{\phi}^2 - k(r - l) \Longrightarrow \ddot{r} + \left(\frac{k}{\mu} - \dot{\phi}^2\right) r = kl \,,$$

para lo cual, si $\dot{\phi}^2 < k/\mu$, se tendrá la solución del oscilador armónico dada como

$$r(t) = A\cos(\beta t + \varphi) + \alpha \,, \qquad \beta^2 = \frac{k}{\mu} - \dot{\phi}^2 \,, \qquad \alpha = \frac{kl}{\beta^2} \,,$$

siendo A, α constantes a determinar por condiciones iniciales. Las restantes soluciones se pueden hallar para los casos en que $\dot{\phi}^2 = k/\mu$ (alejamiento relativo parabólico) o $\dot{\phi}^2 > k/\mu$ (alejamiento relativo hiperbólico).

Para el caso en que $\phi \equiv cte$, la ecuación radial de movimiento nos proporciona la solución del oscilador armónico

$$\mu\ddot{r} = -k(r - l) \Longrightarrow \ddot{r} + \left(\frac{k}{\mu}\right) r = \left(\frac{k}{\mu}\right) l \,,$$

donde nuevamente, considerando que $k > 0$, se recuperan las soluciones del oscilador armónico simple

$$r(t) = A\cos(\beta t + \varphi) + \alpha \,, \qquad \beta^2 = \frac{k}{\mu} \,, \qquad \alpha = l \,,$$

siendo nuevamente A, α constantes a determinar por condiciones iniciales.

---

8. Primeramente es útil obtener la ecuación de las órbitas. Considerando la ecuación de movimiento radial y la conservación de momento angular para alguna fuerza central $F(r)$ se llega a que

$$\ddot{r} = \frac{F(r)}{\mu} + \frac{l^2}{\mu^2 r^3}.$$

Para poder resolver el problema se realiza, por un lado, una sustitución de variables de forma que

$$u = 1/r\,,$$

y, por otra parte, se reescribe la derivada temporal d/dt en término de $d/d\phi$ como

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\frac{d}{d\phi} = \dot{\phi}\frac{d}{d\phi} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{d}{d\phi} = \frac{lu^2}{\mu}\frac{d}{d\phi}.$$

Usando estos resultados, se puede reescribir $\ddot{r}$ en términos de u y $d/d\phi$ como

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}(r) = \frac{lu^2}{\mu}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\phi} \Longrightarrow \ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{lu^2}{\mu}\frac{d}{d\phi}\left(-\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\phi}\right) = -\frac{l^2u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{d\phi^2}.$$

De esta forma, la ecuación radial del movimiento quedará reescrita en términos de u y derivada en ϕ como

$$u''(\phi) = -u(\phi) - \frac{\mu \cdot F(u)}{l^2 u(\phi)^2}.$$

Para la fuerza $F = -\gamma/r^2 = -\gamma u^2$, la ecuación y solución tomarán la forma de las órbitas de Kepler como

$$u''(\phi) = -u(\phi) + \frac{\gamma\mu}{l^2}, \qquad u(\phi) = A\cos(\phi - \delta) + \frac{\gamma\mu}{l^2},$$

para lo cual, sin perder generalidad, definiendo $\delta = 0$ y reemplazando luego $u = 1/r$, se llega a que

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon\cos\phi}\,, \qquad c = \frac{l^2}{\gamma\mu}\,, \qquad \epsilon = Ac\,,$$

para el caso de una elipse, ϵ la excentricidad de la elipse (constante a determinar del problema) y $c = r(\pi/2)$.

Para el problema pedido, la altura del satélite es de perigeo de $R_1 = 3000\ km$ y en el apogeo es de $R_2 = 300\ km$, mientras que el radio de la tierra es $R_T = 6400\ km$. Luego, la excentricidad ϵ de la elipse cumplirá

$$r = \frac{c}{1 + \epsilon\cos(\phi)} \Longrightarrow r_M = \frac{c}{1-\epsilon},\ \ r_m = \frac{c}{1+\epsilon} \Longrightarrow \epsilon = \frac{r_M - r_m}{r_M + r_m} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2 + 2R_T} = \frac{27}{161}km \approx 0.17km\,,$$

mientras que la altura h, distancia perpendicular al semieje mayor de la superficie de la tierra al satélite, será

$$h = r\left(\frac{\pi}{2}\right) - R_T = c - R_T = r_M(1-\epsilon) - R_T = (R_1 + R_T)(1-\epsilon) - R_T = 1413.75\ km\,.$$

---

9. Con la misma estrategia del ejercicio anterior, la ecuación de movimiento para una fuerza central será

$$u''(\phi) = -u(\phi) - \frac{\mu \cdot F}{l^2 u(\phi)^2},$$

donde, para este caso, la fuerza vendrá dada en términos de r o de $u = 1/r$ como

$$F = -\frac{k}{r^2} + \frac{\lambda}{r^3} = -ku^2 + \lambda u^3\,,$$

reemplazando la anterior fuerza en la ecuación de movimiento se obtendrá que

$$u''(\phi) + \left(1 + \frac{\lambda\mu}{l^2}\right)u(\phi) = \frac{k\mu}{l^2}.$$

Dado que $\lambda > 0$, la ecuación a la anterior ecuación es la de un oscilador armónico a frecuencia β dado por

$$u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)} = A\cos(\beta\phi - \delta) + \alpha\,, \qquad \beta^2 = 1 + \frac{\lambda\mu}{l^2}\,, \qquad \alpha = \frac{k}{\lambda + l^2/\mu}\,.$$

Dado que δ es una fase espacial, se toma $\delta = 0$ de modo que la fase inicial coincida con el semieje mayor. De esta forma, y despejando $r(\phi)$ de la solución obtenida, se obtendrá la parametrización como

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon\cos(\beta\phi)}\,, \qquad \beta^2 = 1 + \frac{\lambda\mu}{l^2}\,, \qquad c = \frac{\lambda}{k} + \frac{l^2}{k\mu}\,, \qquad \epsilon = Ac\,.$$

Para el caso en que la excentricidad cumple $0 < \epsilon < 1$, se describen órbitas elípticas pero cuyo radio varía a su vez con frecuencia β; en particular, los radios mayor y menor oscilarán con β de forma que estén en un rango

$$c < r_M < \frac{c}{1-\epsilon}\,, \qquad \frac{c}{1+\epsilon} < r_m < c\,,$$

siendo el caso $\epsilon = 0$ una órbita circular. Puede verificarse para qué valor de β las órbitas resultan cerradas, dicho de otra forma, para qué valor de β se cumple que el radio, tras uno o varios periodos orbitales, vuelva a caer sobre el mismo radio. Para ello se considerarán los periodos T_o (orbital) y T_r (oscilatorio radial), los cuales se cumplirán cada $n_o, n_r \in \mathbb{N}$ con frecuencias ω_o y β_r respectivamente. Luego, dichos periodos vendrán dados como

$$n_o T_o = n_o \frac{2\pi}{\omega_o}\,, \qquad n_r T_r = n_r \frac{2\pi}{\beta_r}\,,$$

igualando resultados se obtiene que β_r, para que las trayectorias se cierren en algún periodo, deberá cumplir

$$\beta_r = \left(\frac{n_o}{n_r}\right)\omega_o\,,$$

con $n_r \neq 0$ y n_0/n_r un número racional. Asimismo, puede verificarse que si β_r, se recuperan las órbitas de Kepler.

---

10. Considérese ahora el caso en que $\lambda < 0$, la ecuación radial transformada será nuevamente

$$u''(\phi) + \left(1 + \frac{\lambda\mu}{l^2}\right)u(\phi) = \frac{k\mu}{l^2}\,,$$

luego, si $(1 + \lambda\mu/l^2)$ es positivo se recuperan las soluciones del caso anterior, pero si es negativo se cumplirá que

$$u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)} = A_1 e^{-\beta\phi} + A_2 e^{\beta\phi} + \alpha\,, \qquad \beta^2 = -\left(1 + \frac{\lambda\mu}{l^2}\right)\,, \qquad \alpha = \frac{k}{\lambda + l^2/\mu}\,,$$

o, en forma equivalente, la parametrización del radio vendrá dada como

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon_1 e^{-\beta\phi} + \epsilon_2 e^{\beta\phi}}\,, \qquad c = \frac{\lambda}{k} + \frac{l^2}{k\mu}\,, \qquad \epsilon_1 = A_1 c\,, \qquad \epsilon_2 = A_2 c\,,$$

en particular, si se definen las constantes tales que $\epsilon = \epsilon_1/2 = \epsilon_2/2$, la solución se puede reescribir como

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon\cosh(\beta\phi)}\,.$$

---

11. Recordando, la ecuación paramétrica de $r(\phi)$ para las órbitas de Kepler, vendrá dada como

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon\cos\phi}\,, \qquad c = \frac{l^2}{\gamma\mu}\,, \qquad \epsilon = Ac\,,$$

donde ϵ es una constante a determinar y, para fuerzas del tipo $F(r) = -\gamma/r^2$, la constante $c = l^2/\gamma\mu$. Asimismo, la coordenada relativa r y el ángulo ϕ se relacionan con las coordenadas cartesianas x, y como

$$x = r\cos\phi \ , \qquad y = r\sin\phi \ , \qquad r^2 = x^2 + y^2 \ .$$

El caso $0 < \epsilon < 1$ de órbita ligada ya fue analizado. Para el caso $\epsilon = 1$ la ecuación paramétrica vendrá dada por

$$r = \frac{c}{1+\cos\phi} = \frac{c}{1+x/r} \Rightarrow r + x = c \Rightarrow (c-x)^2 = r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x(y) = -\frac{y^2}{2c} + \frac{c}{2} \, ,$$

obteniéndose una parábola $x(y)$, también dada como $y^2 + 2cx - c^2 = 0$. Para el caso en que $\epsilon > 1$ se tiene que

$$r = \frac{c}{1+\epsilon\cos\phi} = \frac{c}{1+\epsilon\, x/r} \Rightarrow c = r + \epsilon x \Rightarrow (c-\epsilon x)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow c^2 = x^2 - \epsilon^2 x^2 + 2c\epsilon x + y^2 \ ,$$

$$c^2 = x^2(1-\epsilon^2) + 2\epsilon x + y^2 \Rightarrow -\frac{c^2}{\epsilon^2-1} = \left(x^2 - \frac{2c\epsilon}{\epsilon^2-1}x + \left(\frac{c\epsilon}{\epsilon^2-1}\right)^2\right) - \left(\frac{c\epsilon}{\epsilon^2-1}\right)^2 - \frac{y^2}{\epsilon^2-1} \, ,$$

$$\left(\frac{c\epsilon}{\epsilon^2-1}\right)^2 - \frac{c^2}{\epsilon^2-1} = \left(x - \frac{c\epsilon}{\epsilon^2-1}\right)^2 - \frac{y^2}{\epsilon^2-1} \Rightarrow \left(\frac{c}{\epsilon^2-1}\right)^2 = \left(x - \frac{c\epsilon}{\epsilon^2-1}\right)^2 - \frac{y^2}{\epsilon^2-1} \, ,$$

lo que permite hallar la ecuación de la hipérbola, con coeficientes $\delta, \alpha, \beta > 0$, dada por

$$\frac{(x-\delta)^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \ , \qquad \delta = \frac{c\epsilon}{\epsilon^2-1} \ , \qquad \alpha^2 = \frac{c^2}{(\epsilon^2-1)^2} \ , \qquad \beta = \frac{c^2}{\epsilon^2-1} \ .$$