---

1. Considérese la longitud L entre dos puntos 1,2 de la superficie de una esfera de radio R en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ). Suponiendo que está descripta diferencialmente como $dl^2 = dl_\theta^2 + dl_\phi^2$, la longitud L será

$$L = \int_1^2 dl = \int_1^2 \sqrt{dl_\theta^2 + dl_\phi^2} = \int_1^2 \sqrt{(Rd\theta)^2 + (R\sin\theta\, d\phi)^2} = R\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \left(\sin\theta \frac{d\phi}{d\theta}\right)^2}\, d\theta\,.$$

---

2. Se busca utilizar el Principio de Fermat para estudiar el camino óptico de un rayo de luz reflejado. Si consideramos el tiempo T, que tarda el haz en recorrer un camino $S = cT$, éstos vendrían dados como

$$T = \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2} \frac{c}{v}\frac{ds}{dt}dt = \frac{1}{c}\int_{P_1}^{P_2} n\, ds\ , \qquad S = \int_{P_1}^{P_2} n\, ds\,,$$

además, como el medio es siempre el mismo, $n = n_0 = cte$. Por otra parte, si el camino S es recorrido como P_1QP_2, con $Q = (x, 0, z)$ el punto de reflexión, $P_1 = (0, y_1, 0)$ el inicial y $P_2 = (x_2, y_2, 0)$ el final, se tiene que

$$T = \frac{n_0}{c}\int_{P_1}^{P_2} ds = \frac{n_0}{c}\left(\int_{P_1}^{Q} ds + \int_{Q}^{P_2} ds\right) = \frac{n_0}{c}\left(\sqrt{x^2 + y_1^2 + z^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2 + z^2}\right) = \frac{n_0}{c}(l_1 + l_2)\,.$$

Aplicando el Principio de Fermat, el tiempo recorrido por el rayo de luz debe ser mínimo, luego

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{n_0}{c}\left(\frac{z}{l_1} + \frac{z}{l_2}\right) = 0 \Longrightarrow z = 0\,,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{n_0}{c}\left(\frac{x}{l_1} + \frac{x - x_2}{l_2}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{x}{l_1} = \frac{x - x_2}{l_2} \Longrightarrow \sin\theta_1 = \sin\theta_2 \Longrightarrow \theta_1 = \theta_2\,,$$

de esto se prueba que P_1, Q, P_2 pertenecen al mismo plano $z = 0$ y que se obedece la ley de reflexión $\theta_1 = \theta_2$.

---

3. Considérese el problema 2 para un caso de refracción. Ahora se tienen dos medios con índices de refracción n_1, n_2 y el camino S es corrido nuevamente como P_1QP_2, pero siendo ahora $Q = (x, 0, z)$ el punto de refracción, $P_1 = (0, y_1, 0)$ el inicial y $P_2 = (x_2, -y_2, 0)$ el final. De esta forma, el tiempo recorrido T vendrá dado como

$$T = \frac{1}{c}\int_{P_1}^{P_2} n(y)\, ds = \frac{n_1}{c}\int_{P_1}^{Q} ds + \frac{n_2}{c}\int_{Q}^{P_2} ds = \frac{n_1}{c}\sqrt{x^2 + y_1^2 + z^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2 + z^2} = \frac{1}{c}(n_1 l_1 + n_2 l_2)\,.$$

Aplicando nuevamente el Principio de Fermat de mínimo tiempo, se obtiene que

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{c}\left(n_1\frac{z}{l_1} + n_2\frac{z}{l_2}\right) = 0 \Longrightarrow z = 0\,,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(n_1\frac{x}{l_1} + n_2\frac{x - x_2}{l_2}\right) = 0 \Longrightarrow n_1\frac{x}{l_1} = n_2\frac{x - x_2}{l_2} \Longrightarrow n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2\,,$$

de lo que nuevamente se prueba que P_1, Q, P_2 pertenecen al mismo plano $z = 0$ y que se obedece la ley de refracción $n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$.

---

4. Se busca aplicar el Principio de Fermat visto estrictamente como tiempo estacionario o extremo (en lugar de mínimo) para un espejo cóncavo semiesférico en el que el haz de luz parte del punto $A = (0, R)$ y llega al punto $B = (0, -R)$ mediante una reflexión el punto $P = (R\cos\theta\,, R\sin\theta)$. Luego, el tiempo total recorrido será

$$T=\frac{n_0}{c}\int_A^B ds=\frac{n_0}{c}\left(\int_A^P ds+\int_P^B ds\right)=\frac{n_0}{c}\left(\sqrt{(R\cos\theta)^2+(R\sin\theta-R)^2}+\sqrt{(R\cos\theta)^2+(R\sin\theta+R)^2}\right)=\cdots$$

$$T=\frac{n_0}{c}R\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sin\theta}+\sqrt{1-\sin\theta}\right).$$

Como el tiempo T debe ser un extremo, se puede obtener θ (y por tanto P) en que se cumple, de este modo

$$\frac{dT}{d\theta}=\frac{n_0}{c}R\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin\theta}}-\frac{1}{\sqrt{1-\sin\theta}}\right)=0\Longrightarrow\theta=\pm\frac{\pi}{2}\text{ ó }\theta=0\Longrightarrow\theta_C=0\,,$$

de lo que se puede ver que $\theta=\pm\pi/2$ valdría sólo en caso de reflejarse sobre el mismo punto, es decir $P=A$ o $P=B$, por lo que se deduce que $\theta_C=0$ es el punto en el que T es extremo. Resta verificar que dicho θ_C cumple que T es, además, máximo. Aplicando el criterio de derivada segunda, y valuando en θ_C se obtiene que

$$\frac{d^2T}{d\theta^2}=-\frac{n_0}{c}R\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\theta\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin\theta}}-\frac{1}{\sqrt{1-\sin\theta}}\right)+\frac{\cos^2\theta}{2}\left(\frac{1}{(1+\sin\theta)^{3/2}}+\frac{1}{(1+\sin\theta)^{3/2}}\right)\right)\Longrightarrow\left.\frac{d^2T}{d\theta^2}\right|_{\theta_C}<0\,,$$

por lo que queda verificado que $T(\theta_C)$ es extremo y máximo. De modo que el tiempo que tarda el rayo en recorrer APB vendrá dado como $T=T(\theta_C)=\left(2\sqrt{2}\right)n_0R/c$ y que el punto de reflexión será $P=(R,0)$.

---

5. Se tiene un cilindro recto de radio R del que se busca estudiar la geodésica entre dos puntos 1,2 en su superficie. Para ello, se plantea el principio de mínima acción aplicado a la longitud L entre tales puntos, que se escribirá

$$L=\int_1^2 dl=\int_1^2\sqrt{(Rd\phi)^2+dz^2}=\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{1+\left(R\frac{d\phi}{dz}\right)^2}\;dz\,.$$

La última expresión se puede reescribir en términos de la función f, las variables dependientes ϕ,ϕ' y la variable independiente z de forma tal que la longitud L vendrá dada como

$$L=\int_{z_1}^{z_2}f(\phi,\phi',z)\,dz\,,\qquad f\equiv\sqrt{1+(R\phi')^2}\,,\qquad\phi'\equiv\frac{d\phi}{dz}\,,$$

luego, para cumplir el principio de mínima acción, se resuelve la ecuación de Euler-Lagrange, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial\phi}-\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi'}\right)=0\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial\phi}=0\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial\phi'}\equiv c=cte\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial\phi'}=\frac{R^2\phi'^2}{\sqrt{1+(R\phi')^2}}=c\Longrightarrow\phi'=\frac{d\phi}{dz}=\frac{c}{\sqrt{R^4-c^2R^2}}\equiv m=cte\,,$$

$$\phi(z)=mz+b\,.$$

De este modo, la trayectoria en que se unen los dos puntos 1,2 deben verificar para todo punto que $\phi=\phi(z)$. La resolución completa se puede hacer considerando conocidos los puntos $P_1=(R,\phi_1,z)$ y $P_2=(R,\phi_2,z)$, luego

$$\phi_1=mz_1+b\,,\phi_2=mz_2+b\Longrightarrow\;m=\frac{\phi_1-\phi_2}{z_1-z_2}\,,b=\frac{z_1\phi_2-z_2\phi_1}{z_1-z_2}\,,$$

de modo que, conocida m, se puede calcular la longitud entre los puntos 1,2 resolviendo la integral de L como

$$L=\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{1+(R\phi')^2}\,dz=\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{1+(Rmz)^2}\,dz=\left[\frac{Rmz\sqrt{R^2m^2z^2+1}+\sinh^{-1}(Rmz)}{2Rm}\right]_{z_1}^{z_2}.$$

---

6. Se busca estudiar la braquistócrona, que es la curva entre dos puntos que es recorrida en el menor tiempo posible, para una partícula con velocidad inicial v_0 sometida a un potencial gravitatorio terrestre $E_P = mgy$. En tal caso, la velocidad en todo punto puede ser calculada a partir de la conservación de la energía, de modo que

$$v^2 = 2gy + v_0^2 \,,$$

esto permite reconstruir el tiempo T en términos diferenciales como $v \cdot dT = ds$, de forma tal que integrando se puede obtener el tiempo T que tarda la partícula desde el punto $P_1 = (x_1, y_1)$ hasta el punto $P_2 = (x_2, y_2)$, luego

$$T = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \int_1^2 \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy + v_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{1 + (dx/dy)^2}}{\sqrt{y + v_0^2/2g}} dy \,.$$

Para buscar el mínimo tiempo, se define la función f, variables dependientes x, x' e independiente y como

$$f(x, x', y) = \sqrt{\frac{x'^2 + 1}{y + \alpha}} \,, \qquad x' = \frac{dx}{dy} \,, \qquad \alpha = \frac{v_0^2}{2g} \,,$$

donde la elección de y como variable independiente es conveniente debido a que simplifica el cálculo, ya que el campo gravitatorio viene en tal variable y está incluido en el denominador de f, permitiendo que $\partial f/\partial x = 0$. Para cumplir el principio de mínima acción, se aplica la ecuación de Euler-Lagrange se obtiene, de forma que

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{(x'^2 + 1)(y + \alpha)}} = cte \,,$$

$$\frac{x'^2}{(x'^2 + 1)(y + \alpha)} = cte = \frac{1}{2a} \Longrightarrow x' = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y + \alpha}{2a - (y + \alpha)}} \,.$$

Integrando la última expresión obtenida en términos de y, se halla una relación para $x = x(y)$, es decir,

$$x(y) = \int \sqrt{\frac{y + \alpha}{2a - (y + \alpha)}} dy \,.$$

La integral anterior se simplifica aplicando un cambio de variables, lo que permite resolver la integral, luego

$$y + \alpha = a(1 - \cos\theta) \,, \qquad dy = a \sin\theta \, d\theta \,,$$

$$x(\theta) = \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos\theta)}{2a - a(1 - \cos\theta)}} (a \sin\theta \, d\theta) = a \int \sin\theta \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}} d\theta = a \int \sin\theta \tan\frac{\theta}{2} d\theta = a \int (1 - \cos\theta) d\theta \,.$$

Resolviendo la integral se obtiene $x = x(\theta)$ que, junto con el resultado anterior de $y = y(\theta)$, permite describir en forma parametrizada (parámetro θ) la curva braquistócrona de este caso. Esto queda escrito como

$$x(\theta) = a(\theta - \sin\theta) + b \,, \qquad y(\theta) = a(1 - \cos\theta) - \frac{v_0^2}{2g} \,, \qquad a, b = cte \,.$$

Puede observarse que tal curva es, en efecto, una curva cicloide, corrida en $v_0^2/2g$. De quererse resolver por completo, se debería conocer el punto inicial $P_1 = (x_1, y_1)$ y final $P_2 = (x_2, y_2)$. Esto permitiría calcular el valor inicial θ_1 y final θ_2 del parámetro θ, como así también las constantes a, b del problema.

Para dar un ejemplo, supóngase el caso particular en que $v_0 = 0$ y que, además, $x_1 = y_1 = 0$. En tal caso, se hallaría que inicialmente $\theta_1 = 0$ y, por tanto, que $b = 0$. De esto se obtendría que

$$x(\theta) = a(\theta - \sin\theta) \,, \;\; y(\theta) = a(1 - \cos\theta) \,, \qquad \theta_1 = 0 \,,$$

si además se considerase el punto final de la trayectoria (x_2, y_2), se obtendría θ_2 junto con la constante a.

7. Se busca estudiar la geodésica del problema 1 entre dos puntos $P_1 = (R, \theta_1, \phi_1)$ y $P_2 = (R, \theta_2, \phi_2)$. Con esta finalidad se reescribe la expresión obtenida de forma tal que la longitud quedará escrita como

$$L = \int f(\phi(\theta), \phi'(\theta), \theta)\, d\theta \;, \qquad f \equiv R\sqrt{1 + (\sin\theta\, \phi')^2}\,, \qquad \phi' \equiv \frac{d\phi}{d\theta}.$$

Buscar la geodésica entre dichos puntos, es equivalente a buscar la trayectoria entre ellos tal que su longitud L sea extremo. Para ello, se aplica la ecuación de Euler-Lagrange de forma tal que

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi'}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi'}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \phi'} = \frac{R\sin^2\theta\, \phi'}{\sqrt{1 + \sin^2\theta\, \phi'^2}} = c = cte\,.$$

Sin perder generalidad, dado la simetría esférica del problema, se puede considerar en forma arbitraria los ejes de forma tal que el eje z pase por el punto P_1. En tal caso, $\theta_1 = 0$ y, por tanto, $c = 0$. De este modo, deberá cumplirse para cualquier trayectoria que $\phi'(\theta) = 0$, por lo que $\phi(\theta) = \phi_2 = cte$, donde ϕ_2 es el ángulo azimutal del punto P_2. Hallada la geodésica $\phi(\theta) = \phi_2$, se puede determinar la longitud L entre P_1 y P_2 como

$$L = \int_0^{\theta_2} R\, d\theta = R\theta_2\,.$$

---

8. Se busca cuál es la curva que une a dos puntos fijos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ que genera la superficie de revolución entorno a x de menor área. El área A vendrá dada integrando la expresión $dA = 2\pi y(x) ds$ como

$$A = \int (2\pi y)\, ds = 2\pi \int y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi \int y\sqrt{1 + (dx/dy)^2}\, dy\,.$$

El área A se puede definir en términos de una función f, variable independiente y e independientes x, x' como

$$A = 2\pi \int f(y, x')\, dy\,, \qquad f(y, x') = y\sqrt{1 + x'^2}\,, \qquad x \equiv x(y)\,, \qquad x' \equiv \frac{dx}{dy}$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange se encuentra la curva que genera la superficie de menor área, luego

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{yx'}{\sqrt{1 + x'^2}} \equiv y_0 \Longrightarrow x' = \frac{y_0}{\sqrt{y^2 - y_0}} \Longrightarrow x(y) = y_0 \cosh^{-1}\left(\frac{y}{y_0}\right) + x_0\,,$$

con x_0, y_0 constantes a definir relacionando los puntos fijos inicial $P_1 = (x_1, y_1)$ y final $P_2 = (x_2, y_2)$. Por tanto, la curva $y(x)$ será tal que genera la superficie de revolución de menor área, y viene dada como

$$y(x) = y_0 \cosh\left(\frac{x - x_0}{y_0}\right).$$

Hallada curva $y(x)$ junto con x_0, y_0 es posible calcular la superficie de revolución de mínima área (entorno a x) generada por cualquier par de puntos fijos P_1, P_2. Para ello se retoma el área definida inicialmente y se resuelve

$$A = y_0 \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = y_0 \int_{x_1}^{x_2} \cosh\left(\frac{x - x_0}{y_0}\right)\sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x - x_0}{y_0}\right)}\, dx = y_0 \int_{x_1}^{x_2} \cosh^2\left(\frac{x - x_0}{y_0}\right) dx = \cdots$$

$$A = y_0^2 \int_{\frac{x_1 - x_0}{y_0}}^{\frac{x_2 - x_0}{y_0}} \cosh^2(\tilde{x})\, d\tilde{x} = \frac{y_0^2}{4}\left[2\tilde{x} + \sinh(2\tilde{x})\right]_{\frac{x_1 - x_0}{y_0}}^{\frac{x_2 - x_0}{y_0}} = \frac{y_0^2}{4}\left[2\left(\frac{x_2 - x_1}{y_0}\right) + \sinh\left(\frac{x_2 - x_0}{y_0}\right) - \sinh\left(\frac{x_1 - x_0}{y_0}\right)\right].$$

---

9. Se estudia $f(x, y, y')$ de las ecuaciones de Euler-Lagrange cuando ésta no depende de alguna de sus variables.

Para el caso en que no depende de y, es decir $f = f(x, y')$, las ecuaciones de Euler-Lagrange quedan

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y'} \equiv cte \ ,$$

por tanto, a resolver la última expresión junto con su constante. Esta simplificación es la *primera integral* de las ecuaciones de Euler-Lagrange y en mecánica Lagrangeana aparece cuando el momento se conserva.

Para el caso en que no se depende de x, es decir $f = f(y, y')$, las ecuaciones de Euler-Lagrange se

$$\frac{df}{dx} \underbrace{=}_{*} \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' \underbrace{=}_{**} \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right) y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' \underbrace{=}_{***} \frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) \Longrightarrow f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = cte \ ,$$

donde en $(*)$ se partió derivando la expresión $f(y, y')$, en $(**)$ se reemplazó por la igualdad explícita de la ecuación de Euler-Lagrange y en $(***)$ se contrajo la derivada por multiplicación. Esto permitió obtener una nueva expresión equivalente a una constante, que corresponde a otra *primera integral* de Euler-Lagrange y, en mecánica Lagrangeana, a que no hay dependencia temporal y que la energía del sistema se conserva.

---

10. Se tiene una cuerda de longitud l con un extremo fijo en el origen y el otro ubicado en algún lugar del eje x. Se busca la forma de la cuerda para que el área que forma bajo ésta sea máxima. Para ello se aplica el principio variacional de mínima acción, para encontrar el valor extremo del área A que viene dada como

$$A = \int y dx = \int y\sqrt{ds^2 - dy^2} = \int y\sqrt{1 - (dy/ds)^2} ds \ ,$$

la cual puede ser reescrita en término de una función f y sus variables dependientes y, y' como

$$A = \int_0^l f(y, y') ds \ , \qquad f \equiv y\sqrt{1 - y'^2} \ , \qquad y' = \frac{dy}{ds} \, .$$

Como $f(y, y')$ no depende de la variable independiente s, se puede usar el resultado del problema anterior, luego

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = y\sqrt{1 - y'^2} + \frac{yy'^2}{\sqrt{1 - y'^2}} = cte = r \Longrightarrow y' = \frac{dy}{ds} = \sqrt{1 - y^2/r^2} \, .$$

Integrando la última expresión se puede obtener la curva parametrizada $y(s)$ como

$$\int_0^s ds = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2/r^2}} \Longrightarrow s(y) = r \operatorname{asin}(y/r) \Longrightarrow y(s) = r \sin(s/r) \ ,$$

donde $r \equiv l/\pi = cte$ se calcula a partir de considerar que el otro extremo de la cuerda está fijo en el eje x, es decir que $y(l) = 0$. Resuelto $y(s)$ se puede resolver también $y'(s)$ como

$$y'(s) = \sqrt{1 - \sin^2(s/r)} \, .$$

Asimismo, se puede calcular la componente $x = x(s)$, para ello se calcula inicialmente dx/ds como

$$dx^2 = ds^2 - dy^2 \Rightarrow \frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} = \sin(s/r) \ ,$$

integrando al igual que antes, ahora en términos de s, se obtiene la curva parametrizada $x(s)$ como

$$\int_0^x dx = \int_0^s \sin(s/r)\, ds \Rightarrow x(s) = r(1 - \cos(s/r)) \, .$$

Luego, puede verificarse que $x(s), y(s)$ forman unan semicircunferencia parametrizada en s dada por

$$(x-r)^2+y^2=r^2, \qquad x\equiv x(s)=r-r\cos(s/r)\,, \qquad y\equiv y(s)=r\sin(s/r)\,, \qquad s\in[0,l]\,, \qquad r\equiv l/\pi\,.$$

Por último, conocidos $y(s), y'(s)$ se puede resolver la integral del área propuesta inicialmente como

$$A=\int_0^l f ds=\int_0^l y\sqrt{1-y'^2}\, ds=r\int_0^{\pi r}\sin^2(s/r)\ ds=r\int_0^{\pi r}(1-\cos(2s/r))\, ds=\frac{\pi r^2}{2}=\frac{l^2}{2\pi}\,.$$
