1. Un cohete de masa $m + dm'$ viaja a velocidad v debido a que arroja combustible dm' a velocidad constante v_{ex} relativa al cohete. Planteando el momento lineal para un instante t y otro $t + dt$ se tiene que

$$p(t) = (m + dm') \cdot v(t)\,, \qquad p(t + dt) = m \cdot v(t + dt) + dm' \cdot (v(t + dt) - v_{ex})\,.$$

Es válido para perturbaciones diferenciales ($dt \ll$) hacer un desarrollo en serie en primer orden de $p(t + dt)$ y $v(t + dt)$ despreciando los términos de orden superior, obteniéndose que

$$p(t + dt) = p(t) + \frac{dp(t)}{dt}dt + \cdots = p + dp\,, \qquad v(t + dt) = v(t) + \frac{dv(t)}{dt}dt + \cdots = v + dv\,.$$

Esto permite reescribir los momentos lineales p y $p + dp$ para instantes t y $t + dt$ como

$$p = (m + dm') \cdot v, \qquad p + dp = m \cdot (v + dv) + dm' \cdot (v - v_{ex})\,.$$

Usando ambos resultados, junto con que el momento lineal se conserva ($dp = 0$), se obtiene que

$$dp = m \cdot dv - dm' \cdot v_{ex} = 0 \Longrightarrow \frac{dv}{v_{ex}} = \frac{dm'}{m}\,,$$

asimismo, la cantidad de masa expulsada es igual a la que disminuye en el cohete, es decir $dm' = -dm$. Luego, integrando la anterior expresión, se obtiene la velocidad del cohete en términos de la masa final m como

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v_{ext}} = -\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} \Longrightarrow v(m) = v_0 + v_{ex} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right).$$

Por otra parte, la suma de las fuerzas F usando la expresión general de la Segunda Ley de Newton viene como

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = v\frac{dm}{dt} + m\frac{dv}{dt}\,,$$

usando los resultados obtenidos anteriormente, la fuerza total F en términos de dm/dt quedará escrita como

$$F = (v - v_{ex})\frac{dm}{dt}\,,$$

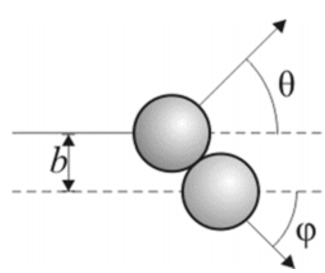
además, considerando que el momento lineal se conserva, la suma de las fuerzas es nula ($F = 0$), luego

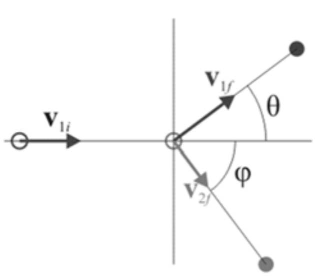
$$F_{prop} = v\frac{dm}{dt} = v_{ex}\frac{dm}{dt} = v_{ex} \cdot \dot{m}\,,$$

donde F_{prop} da cuenta de la fuerza de propulsión ejercida sobre el cohete.

---

2. Se tienen dos partículas 1,2 de igual masa m, una con una velocidad inicial $\bar{v}_{1i}$ y la otra en reposo ($\bar{v}_{2i} = 0$). La primera colisiona elásticamente con la segunda en forma no colineal (supóngase con parámetro de impacto b) y luego ambas salen despedidas con ángulos opuestos θ y ϕ, respectivamente.





Para simplificar el problema, se considerará que los ejes coordenados tienen su origen en el centro de la colisión y que la velocidad de la primera partícula está alineada con el eje x, es decir que $\bar{v}_{1i} = \bar{v}_0 = v_0\hat{x}$.

Las velocidades finales $\bar{v}_{1f}, \bar{v}_{2f}$ escritas en términos de su módulo y ángulo son

$$\bar{v}_{1f} = v_{1f}\cos(\theta)\,\hat{x} + v_{1f}\sin(\theta)\,\hat{y}\,, \qquad \bar{v}_{2f} = v_{2f}\cos(\phi)\,\hat{x} + v_{2f}\sin(\phi)\,\hat{y}\,.$$

Planteando la conservación del momento lineal, por ser choque plástico, se obtiene

$$\bar{p}_i = \bar{p}_f \Longrightarrow m\bar{v}_{1i} = m\bar{v}_{1f} + m\bar{v}_{2f} \Longrightarrow \bar{v}_0 = \bar{v}_{1f} + \bar{v}_{2f} \,.$$

Del mismo modo, por ser un choque elástico, la energía del sistema se conserva de forma que

$$E_i = E_f \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_{1i}^2 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2 \Longrightarrow v_0^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \,.$$

Elevando al cuadrado la expresión de la energía y luego restando la expresión del momento lineal se tiene que

$$v_0^2 = (\bar{v}_{1f} + \bar{v}_{2f})(\bar{v}_{1f} + \bar{v}_{2f}) = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2(\bar{v}_{1f} \cdot \bar{v}_{2f}) \Longrightarrow \bar{v}_{1f} \cdot \bar{v}_{2f} = 0 \,,$$

de forma que $\bar{v}_{1f}$ es ortogonal a $\bar{v}_{2f}$ (o bien una queda inmóvil) y, por tanto, los ángulos cumplen $\theta + \phi = \pi/2$.

Usando la relación entre θ y ϕ, las velocidades finales de las partículas se reescriben como

$$\bar{v}_{1f} = v_{1f}(\cos(\theta)\,\hat{x} + \sin(\theta)\,\hat{y}) \,, \qquad \bar{v}_{2f} = v_{2f}(\sin(\phi)\,\hat{x} - \cos(\phi)\,\hat{y}) \,,$$

aplicando a éstas la conservación del momento lineal, usando que $p_x = mv_0$ y que $p_y = 0$, se llega a que

$$v_0 = v_{1f}\cos(\theta) + v_{2f}\sin(\theta) \,, \qquad 0 = v_{1f}\sin(\theta) - v_{2f}\cos(\theta) \,,$$

resolviendo se obtiene el módulo de las velocidades finales en términos de la inicial y ángulo de desviación como

$$v_{1f} = v_0\cos(\theta) \,, \qquad v_{2f} = v_0 \sin\theta \,,$$

pudiéndose asimismo calcular la energía cinética, y su conservación, como

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = K_0 \,, \qquad E_f = K_{1f} + K_{2f} = K_0\cos^2(\theta) + K_0\sin^2(\theta) = K_0 \,.$$

---

3. Se tiene una mesa rotatoria circular y uniforme (masa M y radio R) en reposo, la cual es colisionada plásticamente por una masa m a velocidad v con parámetro de impacto b, medido desde el centro o de la mesa.

En un choque plástico no se conserva la energía mecánica total del sistema, sin embargo, sí se conserva el momento lineal total, así como también el momento angular, ya que no existen fuerzas ni torques externos al sistema de la masa con la mesa. Resulta útil plantear el momento angular que, inicialmente, viene dado por

$$\bar{L}_o = \bar{r} \times \bar{p} = (b\hat{x} - r_y\hat{y}) \times (mv\hat{y}) = mvb\hat{z} \,,$$

mientras que luego de colisionar el momento angular $\bar{L}_o'$ quedará descripto en términos de la velocidad angular $\bar{\omega}$ adquirida por la mesa, como del momento de inercia total I del sistema, los cuales vienen dados como

$$\bar{L}_o' = I\bar{\omega}, \qquad I \equiv I_z = \int r^2 dm' = \int r^2 dM + \int r^2 dm = I_{m_z} + I_{M_z} \,.$$

El momento de inercia I_{m_z} de la masa y I_{M_z} de la mesa se pueden calcular de forma que

$$I_{m_z} = \int r^2 dm = mb^2 \,, \qquad I_{M_z} = \int r^2 dM = \int r^2(\sigma ds) = \sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2\,(r d\theta) dr = \sigma\frac{\pi R^4}{2} = \frac{MR^2}{2} \,,$$

a lo que resta sumar ambos para luego poder calcular el momento angular $\bar{L}_o'$ como

$$I = mb^2 + \frac{MR^2}{2} \Longrightarrow \bar{L}_o' = I\bar{\omega} = \left(mb^2 + \frac{MR^2}{2}\right)\bar{\omega} \,.$$

Por último, relacionar la conservación del momento angular total $\bar{L}_o = \bar{L}_o'$ permite resolver la velocidad angular

$$\bar{\omega} = \frac{p_0}{I}\hat{z} = \frac{mv}{mb^2 + MR^2/2}\hat{z} \,.$$

4. Se tienen dos masas iguales m unidas a los extremos de una barra rígida sin masa de longitud $2b$, considerándose el sistema en reposo. Se aplica una fuerza F (externa) durante un lapso Δt perpendicular a la barra sobre una de las masas.

Dado que ambas masas son iguales, éstas son equidistantes respecto del centro de la barra que será considerado el centro de masa. Luego, al aplicar una fuerza externa $\bar{F} = F\hat{x}$ al sistema, la aceleración del centro de masa $\ddot{x}$ se verá modificada cumpliendo $F = m\ddot{x}$. Integrando sucesivamente la aceleración en $0 \leq t \leq \Delta t$ se tiene que

$$\int_0^t \ddot{x}_{(0\leq t\leq\Delta t)}dt = \int_0^t \frac{F}{m}dt \Longrightarrow \dot{x}_{(0\leq t\leq\Delta t)} = \frac{F}{m}t \, ,$$

$$\int_0^t \dot{x}_{(0\leq t\leq\Delta t)}dt = \int_0^t \frac{F}{m}t\,dt \Longrightarrow x_{(0\leq t\leq\Delta t)} = \frac{F}{2m}t^2 \, ,$$

luego, para un tiempo $t \geq \Delta t$, la fuerza se extingue, por lo que integrándose para dicho tiempo se obtiene que

$$\int_{\Delta t}^t \ddot{x}_{(t\geq\Delta t)}\,dt = 0 \Longrightarrow \dot{x}_{(t\geq\Delta t)} = \frac{F}{m}\Delta t \, ,$$

$$\int_{\Delta t}^t \ddot{x}_{(t\geq\Delta t)}\,dt = \int_{\Delta t}^t \frac{F}{m}\Delta t\,dt \Longrightarrow x_{(t\geq\Delta t)} = \frac{F}{m}\Delta t(t-\Delta t) + \frac{F}{2m}\Delta t^2 \, ,$$

juntando ambos intervalos se obtiene la posición del centro de masa $x_{(t\geq 0)}$ para todo tiempo $t \geq 0$ como

$$x_{(t\geq 0)} = \frac{F}{2m}\cdot\begin{cases} t^2 & 0\leq t\leq\Delta t \\ \Delta t\cdot(2t-\Delta t) & t\geq\Delta t \end{cases} .$$

Con el mismo criterio, dado que la aplicación de la fuerza $\bar{F} = F\hat{x}$ se produce a una distancia $\bar{r} = -b\hat{y}$ del centro de masa $CM \equiv O$ del sistema, habrá un torque externo $\bar{\tau}_o$ respecto del centro de masa, el cual vendrá dado como

$$\bar{\tau}_o = \dot{\bar{L}}_o = \bar{r}\times\bar{F} = (-b)\hat{y}\times F\hat{x} = bF\hat{z} \, ,$$

integrando respecto de t el torque externo se recupera el momento angular $\bar{L}_o$ del sistema respecto del centro de masa. Por tanto, para el intervalo en que la fuerza $\bar{F}$ existe y para el que se extingue, el momento angular será

$$\int_0^t \dot{\bar{L}}_{o\,(0\leq t\leq\Delta t)}dt = \int_0^t (bF\hat{z})dt \Longrightarrow \bar{L}_{o\,(0\leq t\leq\Delta t)} = bFt\hat{z} \, ,$$

$$\int_{\Delta t}^t \dot{\bar{L}}_{o\,(t\geq\Delta t)}dt = 0 \Longrightarrow \bar{L}_{o\,(t\geq\Delta t)} = bF\Delta t\hat{z} \, ,$$

lo que permite reconstruir el momento angular $\bar{L}_o$ respecto del centro de masa para todo tiempo $t \geq 0$ como

$$\bar{L}_o = bF\hat{z}\cdot\begin{cases} t & 0\leq t\leq\Delta t \\ \Delta t & t\geq\Delta t \end{cases} .$$

Además, considerando que $\bar{L}_o = I\bar{\omega}$, siendo $\bar{\omega}$ la velocidad angular e I el momento de inercia total del sistema,

$$\bar{L}_o = I\bar{\omega} = \left(\int r^2 dm\right)\bar{\omega} = (b^2m + (-b)^2m)\bar{\omega} = 2b^2m\bar{\omega} \, ,$$

lo que permite reconstruir la velocidad angular del sistema respecto del centro de masa para todo tiempo como

$$\bar{\omega} = \frac{F\hat{z}}{2mb}\cdot\begin{cases} t & 0\leq t\leq\Delta t \\ \Delta t & t\geq\Delta t \end{cases} .$$

5. Se tiene un sistema cuyo eje vertical rota a una velocidad angular constante $\bar{\omega} = \omega\hat{z}$ que se encuentra soldado en su centro O a una barra de masa despreciable, con inclinación α respecto de $\hat{z}$ y en sus extremos dos masas 1,2 iguales M a distancia $l/2$. Considerando que $\theta(t) = \omega t$, la posición y velocidad de la masa 1 serán

$$\bar{r}_1 = \frac{l}{2}\sin(\alpha)\cos(\theta)\,\hat{x} + \frac{l}{2}\sin(\alpha)\sin(\theta)\,\hat{y} + \frac{l}{2}\cos(\alpha)\,\hat{z} = \frac{l}{2}\sin(\alpha)\,\hat{r} + \frac{l}{2}\cos(\alpha)\,\hat{z}\,,$$

$$\bar{v}_1 = \dot{\bar{r}}_1 = -\frac{\dot{\theta}l}{2}\sin(\alpha)\sin(\theta)\,\hat{x} + \frac{\dot{\theta}l}{2}\sin(\alpha)\cos(\theta)\,\hat{y} = \frac{\dot{\theta}l}{2}\sin\alpha\,\hat{\theta} \Longrightarrow \bar{p}_1 = \frac{M\omega l}{2}\sin\alpha\,\hat{\theta}\,.$$

Puede verificarse que la restante masa 2 cumple que $\bar{r}_2 = -\bar{r}_1$ y, por tanto, que $\bar{v}_2 = -\bar{v}_1$ y que $\bar{p}_2 = -\bar{p}_1$. El momento angular total $\bar{L}_o$ respecto del centro O vendrá dado por

$$\bar{L}_o = \bar{r}_1 \times \bar{p}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{p}_2 = \bar{r}_1 \times \bar{p}_1 + (-\bar{r}_1) \times (-\bar{p}_1) = 2\bar{r}_1 \times \bar{p}_1 = \left(\frac{M\omega l^2}{2}\right)(\sin(\alpha)\,\hat{r} + \cos(\alpha)\,\hat{z}) \times \left(\sin\alpha\,\hat{\theta}\right) = \cdots$$

$$\bar{L}_o = \left(\frac{M\omega l^2}{2}\right)(\sin^2(\alpha)\,\hat{z} - \sin(\alpha)\cos(\alpha)\,\hat{r})\,.$$

Puede de igual modo calcularse $\bar{L}_o$ considerando los ejes principales de inercia de la barra como

$$\bar{L}_o = \bar{\bar{I}} \cdot \bar{\omega} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega\cos(\alpha) \\ 0 \\ \omega\sin(\alpha) \end{pmatrix} = I_{11}\omega\cos(\alpha)\,\hat{\imath} + I_{33}\omega\sin(\alpha)\,\hat{k}\,,$$

para luego resolver los momentos de inercia en los ejes principales, entonces

$$I_{11} = 0, \qquad I_{22} = I_{33} = Mr_1^2 + Mr_2^2 = 2Mr_1^2 = Ml^2/2\,,$$

lo que permite recuperar el mismo $\bar{L}_o$ que el calculado anteriormente, obteniéndose que

$$\bar{L}_o = \left(\frac{M\omega l^2}{2}\right)\sin(\alpha)\,\hat{k} = \left(\frac{M\omega l^2}{2}\right)\sin(\alpha)\,(\sin(\alpha)\,\hat{z} - \cos(\alpha)\,\hat{r}) = \left(\frac{M\omega l^2}{2}\right)(\sin^2(\alpha)\,\hat{z} - \sin\alpha\cos(\alpha)\,\hat{r})\,.$$

Habiéndose obtenido $\bar{L}_o$, se puede calcular el torque $\bar{\tau}_o$ como la derivada temporal de $\bar{L}_o$, es decir que

$$\bar{\tau}_o = \dot{\bar{L}}_o = -\left(\frac{M\omega l^2}{2}\right)\sin(\alpha)\cos(\alpha)\,\dot{\hat{r}} = -\left(\frac{M\omega^2 l^2}{2}\right)\sin(\alpha)\cos(\alpha)\,\hat{\theta}\,,$$

Los resultados de momento angular $\bar{L}_o$ y del torque $\bar{\tau}_o$ se reescriben en coordenadas cartesianas como

$$\bar{L}_o(t) = \left(\frac{M\omega l^2}{2}\right)\sin(\alpha)\cdot(\cos(\omega t)\cos(\alpha)\,,\sin(\omega t)\cos(\alpha)\,,\sin(\alpha))\,,$$

$$\bar{\tau}_o(t) = \left(\frac{M\omega^2 l^2/2}{2}\right)\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cdot(-\sin(\omega t)\,,\cos(\omega t)\,,0)\,.$$

---

6. La energía potencial del juguete en términos de la altura $y(\theta)$ y ángulo θ del centro de masa viene dada como

$$U = mg\cdot y(\theta) = mg\cdot(R + (h-R)\cos\theta)\,,$$

derivando U e igualando a cero se obtienen los puntos críticos del potencial, obteniéndose que

$$U' = \frac{dU}{d\theta} = -mg(h-R)\sin\theta = 0 \Longrightarrow \theta = 0\ \textit{es un punto crítico}\,,$$

Determinando el signo de la derivada segunda de U para el punto crítico se determina la estabilidad, luego

$$U'' = \frac{d^2U}{d\theta^2} = -mg(h-R)\cos\theta\,,$$

tomando las posibles relaciones entre R, h y luego valuando en $\theta = 0$ se obtienen los posibles equilibrios como

$$R > h \Longrightarrow U''(\theta = 0) > 0 \Longrightarrow \theta \; es \; un \; equilibrio \; estable \; ,$$

$$R < h \Longrightarrow U''(\theta = 0) < 0 \Longrightarrow \theta \; es \; un \; equilibrio \; inestable \; .$$

---

7. Las relaciones de vínculo entre la soga l y las alturas H, h vienen dadas como

$$l = l_M + l_m = H + \frac{b}{\sin\theta} \; , \qquad H \equiv H(\theta) = l - \frac{b}{\sin\theta} \; , \qquad h \equiv h(\theta) = \frac{b}{\tan\theta} \, ,$$

de forma que es posible escribir la energía potencial gravitatoria U, considerando el cero de potencial en el techo del sistema, en términos de las alturas $H(\theta), h(\theta)$ dependientes de θ como

$$U = -MgH + mgh = -Mg\left(l - \frac{b}{\sin\theta}\right) - mg\left(\frac{b}{\tan\theta}\right).$$

Derivando respecto de θ la energía potencial U es posible hallar el punto de equilibrio $\theta = \theta_c$ como

$$\frac{dU}{d\theta} = -Mg\frac{dH}{d\theta} - mg\frac{dh}{d\theta} = -Mg\left(\frac{b\cos\theta}{\sin^2\theta}\right) - mg\left(-\frac{b}{\sin^2\theta}\right) = \frac{gb}{\sin^2\theta}(m - M\cos\theta) \; ,$$

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \Longrightarrow \cos\theta = \frac{m}{M} \Longrightarrow \theta_c = \operatorname{acos}\left(\frac{m}{M}\right) \; es \; pto. de \; equilibrio \; si \; m \leq M \; .$$

Determinando el signo de la derivada segunda de U es posible determinar si dicho θ_c es estable o no, luego

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \frac{gb}{\sin\theta}\left(M - \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}(m - M\cos\theta)\right),$$

$$\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_c} = \frac{Mgb}{\sin\theta_c} > 0 \Longrightarrow \theta_c = \operatorname{acos}\left(\frac{m}{M}\right) es \; pto. de \; equilibrio \; estable \; si \; m \leq M.$$

---

8. Se tiene un cuerpo rígido con momento de inercia I_{CM} que rota en un plano en torno a un punto O, cuya distancia es L respecto del CM. Las ecuaciones de Newton del sistema en coordenadas polares vendrán como

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \sum F_r \Longrightarrow -L\dot{\theta}^2 = Mg\cos\theta - F_v \; ,$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \sum F_\theta \Longrightarrow L\ddot{\theta} = -Mg\sin\theta \; .$$

A partir de la segunda se resuelve $\dot{\theta}(\theta)$ y de la primera se puede recuperar la fuerza de vínculo F_v, luego

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}\frac{d\theta}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \Longrightarrow \int_0^{\dot{\theta}} L\dot{\theta}d\dot{\theta} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} -Mg\sin\theta\, d\theta \Longrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{Mg}{L}\left(2\cos\theta - \sqrt{2}\right),$$

$$F_v = Mg\cos\theta + L\dot{\theta}^2 = Mg\left(3\cos\theta - \sqrt{2}\right).$$

Por otra parte, la ecuación de torques respecto al eje de rotación O vendrá dada como

$$\bar{\tau}_o = \bar{r} \times \bar{F} = (r\hat{r}) \times \left(F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta}\right) \Longrightarrow \bar{\tau}_o = -MgL\sin\theta\,\hat{z} \; ,$$

aplicando la definición de torque, la ecuación se puede reescribir y resolver en variables $\dot{\theta}, \theta$ de forma que

$$\tau_o = \frac{dL_o}{dt} = I_o\frac{d\dot{\theta}}{dt} = I_o\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \Longrightarrow \int_0^{\dot{\theta}} I_o\dot{\theta}d\dot{\theta} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} -MgL\sin\theta\, d\theta \Longrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{MgL}{I_o}\left(2\cos\theta - \sqrt{2}\right).$$

Recordando el Teorema de Steiner, el momento de inercia I_o sobre un eje que no pasa sobre el centro de masa del cuerpo se puede relacionar con un momento I_{CM} sobre un eje que sí pase sobre el centro de masa, sumado a su masa por la distancia perpendicular al cuadrado de dichos ejes. Esto permite obtener, para el caso de este sistema, que $I_o = I_{CM} + ML^2$. Además, conociendo que inicialmente está en reposo con ángulo $\theta = \pi/4$, se puede calcular la velocidad angular para todo θ y, en particular, para $\theta = 0$. De esta forma se obtiene que

$$\dot{\theta}(\theta) = \sqrt[2]{\frac{MgL}{(I_{CM} + ML^2)}\left(2\cos\theta - \sqrt{2}\right)}, \qquad \dot{\theta}(0) = \sqrt[2]{\frac{MgL\left(2 - \sqrt{2}\right)}{(I_{CM} + ML^2)}}.$$

La única fuerza que realiza trabajo es aquella paralela a la trayectoria. En este problema, la única fuerza que realiza trabajo es F_θ, por lo que el trabajo W se podrá escribir como

$$dW = F_\theta(rd\theta) \Longrightarrow dW = -MgL\sin\theta\, d\theta \Longrightarrow W_{\theta_i\theta_f} = MgL\left(\cos\theta_f - \cos\theta_i\right).$$

Los resultados de $\dot{\theta}(\theta)$ se pueden también calcular a partir de la energía mecánica del sistema, en consideración que todas las fuerzas que realizan trabajo son conservativas. Pensando que la energía consiste en parte cinética (rotación del cuerpo rígido) más potencial (gravitatoria), la energía mecánica para todo θ vendrá como

$$U = mgH + \frac{1}{2}I_o\omega^2 = mgL(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}(I_{CM} + ML^2)\dot{\theta}^2 = cte,$$

tomando en cuenta que inicialmente está en reposo en $\theta = \pi/4$, la energía cinética se puede dar constante como

$$U_0 = mgH_0 = mgL\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = cte,$$

relacionando luego éste resultado con el anterior se puede reescribir nuevamente la velocidad angular como

$$\dot{\theta}(\theta) = \sqrt[2]{\frac{MgL}{(I_{CM} + ML^2)}\left(2\cos\theta - \sqrt{2}\right)}.$$

---

9. Considérese un cilindro hueco de radios r y R (en particular $r = 0$ es macizo), altura h y densidad de masa homogénea ρ. Su momento de inercia respecto al eje paralelo largo y que pasa por el centro de masa es

$$I_{cm} = \int r^2 dm = \int_r^R \int_0^{2\pi} r^2 \rho h(rd\theta)dr = \left(\frac{\rho h\pi}{2}\right)(R^4 - r^4) = \left(\frac{\rho h\pi}{2}\right)(R^2 - r^2)(R^2 + r^2),$$

si se reescribe en términos de una masa total M, el momento de inercia vendrá escrito como

$$M = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_r^R \rho r\, drd\theta dz = \rho h\pi(R^2 - r^2) \Longrightarrow I_{cm} = \frac{M}{2}(R^2 + r^2).$$

Por otro parte, la condición de rodadura en el punto o permite calcular la velocidad del centro de masa como

$$\bar{v}_{cm} = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times (\bar{r}_{cm} - \bar{r}_o) = 0 + (-\omega\hat{z}) \times (-R\hat{r}) = \omega R\hat{\theta} \Longrightarrow \omega = \frac{v_{cm}}{R}.$$

Aplicando consideraciones energéticas, supóngase que el centro de masa del cilindro parte de una altura H con una energía potencial máxima U_i y termina llegando altura nula con máxima energía cinética U_f, entonces

$$U_i = MgH, \qquad U_f = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}(R^2 + r^2)\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}Mv_{cm}^2\left(3 + \frac{r^2}{R^2}\right),$$

lo que permite calcular la velocidad del centro de masa al haber llegado a su estado final como

$$v_f \equiv v_{cm} = \sqrt{\frac{4gH}{3 + r^2/R^2}}\,,$$

de lo que puede observarse que, a medida que se ahueca en r el cilindro, la velocidad final v_f disminuye. Supóngase ahora que el cilindro tiene una aceleración constante a y llega al estado final x_f, v_f en tiempo t_f, luego

$$v(t) = at \Longrightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 \Longrightarrow x_f = \frac{1}{2}\left(\frac{v_f}{t_f}\right)t_f^2 \Longrightarrow t_f = \frac{2x_f}{v_f} = \frac{2}{v_f}\left(\frac{h}{\sin\alpha}\right) = \sqrt{\frac{h(3 + r^2/R^2)}{\sin^2\alpha}}\,,$$

viéndose que, a medida que se ahueca en r el cilindro, el tiempo final t_f de llegada aumenta.

---

10. Se tiene un cilindro de radio interno r, radio externo R y momento de inercia I_{CM}. El mismo se encuentra en rodadura sobre una superficie en rozamiento, y se le tira en el radio r inferior con una fuerza $\bar{F}$ en un ángulo α.

Consideran el punto O en la rodadura, las ecuaciones de Newton y las de los torques vendrán como

$$m\ddot{x} = F_x + F_{re} = F\cos\alpha - \mu_e|N|\,,$$

$$m\ddot{y} = N + P + F_y = N - mg + F\sin\alpha\,,$$

$$\bar{\tau}_o = (\bar{r} - \bar{R}) \times \bar{F} = \big(-r\hat{y} - (-R\hat{y})\big) \times F_x\hat{x} = -(R - r)F\cos\alpha\,\hat{z}\,.$$

El cilindro no se acelera verticalmente, luego $\ddot{y} = 0$. Además, el cilindro siempre está en rodadura, de modo que $N > 0$. Aplicando estas condiciones en las ecuaciones de Newton se obtiene la aceleración horizontal como

$$\ddot{y} = 0 \Longrightarrow N = mg - F\sin\alpha > 0\,,$$

$$\ddot{x} = \frac{F}{m}\cos\alpha - \mu_e\left(g - \frac{F}{m}\sin\alpha\right) = \frac{F}{m}(\cos\alpha + \sin\alpha) - \mu_e g\,.$$

Por otro lado, aplicando la definición de torque y el Teorema de Steiner, se obtiene la aceleración angular como

$$\bar{\tau}_o = \frac{d\bar{L}_o}{dt} = I_o\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \left(I_{cm} + \frac{mR^2}{2}\right)\frac{d\bar{\omega}}{dt} = -(R - r)F\cos\alpha\,\hat{z} \Longrightarrow \frac{d\bar{\omega}}{dt} = -\frac{(R - r)F\cos\alpha}{I_{cm} + mR^2/2}\hat{z}\,.$$

En cuanto a las fuerzas que realizan trabajo, sólo deben existir en el eje x, pues en el eje y no hay desplazamiento. Por otra parte, la fuerza de rozamiento $\bar{F}_{re} = F_{re}\hat{x}$ no realiza trabajo pues el punto de contacto en O no tiene desplazamiento ($v_o \equiv 0$). Luego, la única fuerza del sistema que realiza trabajo es $\bar{F}_x = F_x\hat{x}$. Además, dicha fuerza es conservativa, por ser constante y verificarse que $F_x = -dV/dx$ con $V = -F_x x$. Dado que no hay trabajo de fuerzas no conservativas en el sistema, se verifica que la energía mecánica del sistema.

Puede observarse que para un ángulo crítico $\alpha_0 \equiv \alpha = \pi/2$ la aceleración angular $d\bar{\omega}/dt$ resulta nula. Esto permite identificar que si $\alpha < \alpha_0$ el cuerpo rotará en sentido horario (negativo) hacia donde es tirado y que si $\alpha > \alpha_0$ el cuerpo rotará en sentido antihorario (positivo) en contra de donde es tirado.