---

1. Se tiene una máquina de Atwood compuesta por una polea y dos masas, cuyo Lagrangiano se representa como

$$\mathcal{L} = T_1 + T_2 + T_d - (U_1 + U_2) = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{y}^2_{(\dot{x})} + \frac{1}{2}I\omega^2_{(\dot{x})} - \left(-m_1 g x - m_2 g y_{(x)}\right),$$

usando las condiciones de vínculo de la soga ($l = x + y + 2\pi R$) y de la polea ($\dot{x} = \omega R$), junto con el momento de inercia de la polea ($I = MR^2/2$), el Lagrangiano en la coordenada generalizada x se escribirá como

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m_t\dot{x}^2 + m_r g x\,, \qquad m_t = m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\,, \qquad m_r = m_1 - m_2\,,$$

donde se omitieron las constantes del Lagrangiano por no alternar las ecuaciones de movimiento resultantes. Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange, el momento generalizado p de la coordenada x será

$$p \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m_t\dot{x} \Longrightarrow \dot{x} = \frac{p}{m_t},$$

usando $q \equiv x$ y el resultado obtenido para p, el Hamiltoniano del sistema quedará escrito como

$$H(q,p,t) = p\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{2m_t} - m_r g q\,,$$

lo cual, para el sistema dado que no depende explícitamente del tiempo y cuyo potencial es conservativo, se verifica que $H = E$, siendo el Hamiltoniano la energía del sistema. Por último, las ecuaciones de Hamilton serán

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \Longrightarrow \dot{q} = \frac{p}{m_t},$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} \Longrightarrow \dot{p} = m_r g\,,$$

derivando la primera ecuación y usando el resultado obtenido en la segunda se obtiene la aceleración del sistema

$$\ddot{x} \equiv \ddot{q} = \frac{m_r}{m_t}.$$

---

2. El Lagrangiano para el sistema propuesto en cilíndricas $(R, \phi, c\phi)$ viene dado como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz = \frac{1}{2}m(R^2 + c^2)\dot{\phi}^2 - mgc\phi\,,$$

el momento generalizado p_ϕ de la coordenada ϕ será

$$p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = m(R^2 + c^2)\dot{\phi} \Longrightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m(R^2 + c^2)},$$

de lo que se puede reconstruir el Hamiltoniano como

$$H(\phi, p_\phi) = p_\phi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{p_\phi^2}{m(R^2 + c^2)} + mgc\phi\,.$$

Las ecuaciones de Hamilton resultantes serán

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m(R^2 + c^2)}\,, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial\phi} = -mgc\,,$$

de lo que se puede hallar, derivando la primera ecuación y usando la segunda, las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{\phi} = -\frac{gc}{R^2+c^2}\,, \qquad \ddot{z} = -\frac{gc^2}{R^2+c^2}\,.$$

Puede verificarse, para este problema, que $H = E$ pues los vínculos son holónomos y esclerónomos, junto con que $U \neq U(\dot{\phi})$. Por otra parte, si $R = 0$, se recupera el resultado de caída libre con aceleración $-g\hat{z}$.

---

3. Se tiene el Lagrangiano en coordenadas cartesianas como $\big(x, h(x)\big)$ junto con gravedad dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 - mg\bar{r}\hat{y} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2\right) - mgh_{(x)} = \frac{1}{2}m\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)\dot{x}^2 - mgh_{(x)}\,,$$

el momento generalizado p de la coordenada x y el Hamiltoniano del sistema resultarán

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)\dot{x}\,, \qquad H(x,p) = p\dot{x} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{2m}\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{-1} + mgh_{(x)}\,,$$

por último, las ecuaciones de Hamilton quedarán descriptas por

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{-1}\,, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2\frac{p^2}{m}\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{-2}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - mg\frac{\partial h}{\partial x}\,.$$

---

4. Se tiene una fuerza dada por $F = -k\hat{x} + K\hat{y}$, la cual deriva de un potencial $U = kx - Ky$, verificándose que la fuerza es conservativa ($F = -\nabla U$). Considerando que es el único potencial, el Lagrangiano de la partícula será

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - (kx - Ky)\,,$$

los momentos generalizados p_x, p_y de las coordenadas x, y, junto con el Hamiltoniano resultante, serán

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\,, \qquad p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}\,,$$

$$H(x, p_x, y, p_y) = \left(p_x\dot{x} + p_y\dot{y}\right) - \mathcal{L} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + (kx - Ky)\,,$$

verificándose, para este caso, que $H = E$. Por último, las ecuaciones de Hamilton quedarán escritas como

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}\,, \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -k\,, \qquad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}\,, \qquad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = K\,,$$

de lo que se obtienen, combinando estos resultados, las ecuaciones de movimientos y sus soluciones como

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} \Longrightarrow x(t) = -\frac{k}{m}t^2 + v_{x_0}t + x_0\,,$$

$$\ddot{y} = \frac{K}{m} \Longrightarrow y(t) = \frac{K}{m}t^2 + v_{y_0}t + y_0\,.$$

---

5. Se tiene una partícula con posición $r \equiv r(x,y)$, contenida en un riel horizontal que rota con velocidad angular constante ω, sin estar presente un potencial. En polares, la descripción Lagrangiana y Hamiltoniana es

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right)\,, \qquad U = 0\,, \qquad \mathcal{L} = T - U\,,$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\,, \qquad H = p_r\dot{r} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{m}{2}r^2\omega^2 \neq T + U\,,$$

de lo cual se verifica que $H \neq T + U$. Esto se debe a que $r \equiv r(x, y)$ no es una coordenada natural, pues se relaciona en forma dependiente del tiempo con las coordenadas x, y, ya que $(x, y) = (r \cos \omega t\,, r \sin \omega t)$. La relación $H = T + U = E$ sólo es válida si las coordenadas generalizadas son naturales (la relación entre las coordenadas generalizadas y las cartesianas subyacentes es independiente del tiempo).

---

6. Primeramente se verifica que la fuera es conservativa y tiene un potencial asociado dado por

$$\bar{F} \equiv -kr\hat{r} = -\nabla U \Longrightarrow U(r) = \frac{k}{2}r^2 \Longrightarrow U(\phi, z) = \frac{k}{2}(z^2 + R^2),$$

de modo que, despreciando los términos constantes, el Lagrangiano quedará escrito como

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{mR^2}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{m}{2}\dot{z}^2 - \frac{k}{2}z^2\,.$$

Por Euler-Lagrange se verifica que el momento conjugado p_ϕ es conservado, siendo los momentos conjugados

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mR^2\dot{\phi} = cte\,, \qquad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m\dot{z}\,,$$

lo que permite reescribir el Hamiltoniano como

$$H = p_\phi\dot{\phi} + p_z\dot{z} - \mathcal{L} = \left(\frac{1}{R^2}\right)\frac{p_\phi^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{k}{2}z^2\,.$$

Por último, las ecuaciones de Hamilton quedarán escritas como

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mR^2}\,, \qquad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0\,,$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz\,,$$

las cuales resultan en ecuaciones de movimiento desacopladas que, junto con sus soluciones, serán

$$\ddot{\phi} = 0 \Longrightarrow \phi(t) = \dot{\phi}_0 t + \phi_0\,,$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0, (\omega_0^2 = k/m) \Longrightarrow z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)\,,$$

verificándose que $\phi(t)$ corresponde a un crecimiento lineal mientras que $z(t)$ a un oscilador armónico simple.

---

7. Se tiene una masa confinada en la superficie de un cono, de forma que su posición se parametriza como

$$\bar{r} = (cz\cos\phi\,, cz\sin\phi\,, z)\,,$$

luego, el Lagrangiano del sistema en presencia de un campo gravitatorio uniforme será

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - (mgz) = \frac{1}{2}m(1 + c^2)\dot{z}^2 + \frac{1}{2}mc^2z^2\dot{\phi}^2 - mgz\,,$$

los momentos generalizados p_z, p_ϕ de las coordenadas z, ϕ, junto con el Hamiltoniano resultante, serán

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m(1 + c^2)\dot{z}\,, \qquad p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mc^2z^2\dot{\phi}\,,$$

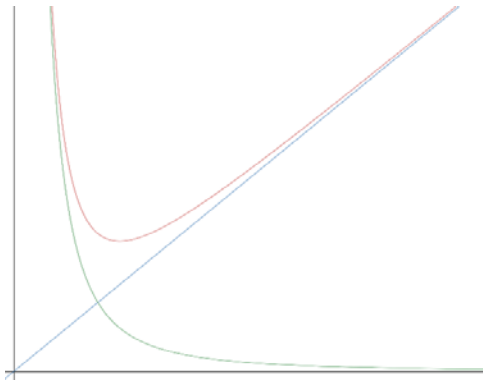
$$H\left(z, p_z, \phi, p_\phi\right) = \left(p_z\dot{z} + p_\phi\dot{\phi}\right) - \mathcal{L} = \left(\frac{1}{1 + c^2}\right)\frac{p_z^2}{2m} + \left(\frac{1}{c^2z^2}\right)\frac{p_\phi^2}{2m} + mgz\,,$$

pudiéndose obtener por último las ecuaciones de Hamilton como

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \left(\frac{1}{1+c^2}\right)\frac{p_z}{m}, \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{c^2 z^2}\right)\frac{p_\phi^2}{m} - mg \,,$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \left(\frac{1}{c^2 z^2}\right)\frac{p_\phi}{m} \,, \qquad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \,,$$

de lo que se verifica que $L_z \equiv p_\phi \equiv cte$, siendo por tanto una magnitud conservada.



Es posible estudiar el potencial efectivo del Hamiltoniano dado por

$$U_{eff}(z) = \left(\frac{1}{c^2 z^2}\right)\frac{p_\phi^2}{2m} + mgz \,,$$

donde esta relación sólo es válida si $p_\phi \neq 0$. Del potencial efectivo se verifica rápidamente que, para cualquier valor de energía posible, se estará dentro de un pozo de potencial.

De dicho potencial se encontrará una trayectoria circular para el mínimo de potencial, mientras que para cualquier otro valor existirán trayectorias elípticas entre un z_{min} y un z_{max}.

Por otra parte, a partir de las ecuaciones de Hamilton se pueden derivar las ecuaciones de movimiento, luego

$$\ddot{\phi} = -\frac{2}{z}\left(\frac{1}{c^2 z^2}\right)\frac{p_\phi}{m} + \left(\frac{1}{c^2 z^2}\right)\frac{\dot{p}_\phi}{m} = -\frac{2}{z}\dot{\phi}^2 \,,$$

$$\ddot{z} = \left(\frac{1}{1+c^2}\right)\frac{\dot{p}_z}{m} = \left(\frac{1}{1+c^2}\right)\frac{1}{m}\left(\frac{1}{z}\left(\frac{1}{c^2 z^2}\right)\frac{p_\phi^2}{m} - mg\right) = \left(\frac{c^2}{1+c^2}\right)\left(z\dot{\phi}^2 - \frac{g}{c^2}\right).$$

De existir trayectorias circulares se tiene que $z = z_0 = cte$ y que $\ddot{z} = 0$, luego de la ecuación en z se obtiene

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}_0 = \sqrt{\frac{g}{z_0 c^2}} = cte \,,$$

de lo que se desprende que tanto $z = z_0$ como $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$ son constantes. Por otra parte, es posible estudiar en la ecuación de movimiento en z pequeños apartamientos de la trayectoria circular, tales que $z = \epsilon + z_0$, luego

$$\ddot{\epsilon} = \left(\frac{p_\phi^2}{m^2 c^2 (1+c^2)}\right)\frac{1}{(\epsilon + z_0)^3} - \left(\frac{g}{1+c^2}\right),$$

aplicando un desarrollo a primer orden de $1/(\epsilon + z_0)^3$ en z_0 se llega a que para $\epsilon \ll 1$ la ecuación quedará

$$\ddot{\epsilon} \approx -\omega_0^2 \epsilon + \epsilon_0 \,, \qquad \omega_0^2 = \frac{3}{z_0^4}\left(\frac{p_\phi^2}{m^2 c^2 (1+c^2)}\right) > 0 \,, \qquad \epsilon_0 = \frac{z_0}{3}\omega_0^2 - \frac{g}{1+c^2} \,,$$

lo cual es válido dada la conservación de p_ϕ y corresponde a la ecuación de un oscilador armónico siendo, por tanto, z_0 un punto de equilibrio estable del sistema. Además, es posible el ángulo de inclinación del cono como

$$\tan\alpha = \frac{\rho}{z} = \frac{cz}{z} = c \,, \qquad \sin\alpha = \frac{\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \frac{cz}{\sqrt{z^2 + c^2 z^2}} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \,,$$

en cuyo caso, la frecuencia angular de pequeñas oscilaciones ω_0 se podrá escribir como

$$\omega_0 = \sqrt{3}\left(\frac{1}{c^2 z_0^2}\frac{p_\phi}{m}\right)\left(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right) = \sqrt{3}\dot{\phi}\sin\alpha \,,$$

luego, en el caso particular de que $\alpha = \operatorname{asin}\left(1/\sqrt{3}\right)$, se verifica que $\omega_0 = \dot{\phi}$.

8. Se describirá el movimiento del cuerpo rígido medido desde “O”, suponiendo conocido el momento de inercia del centro de masa I_0, es posible describir en coordenadas polares el centro de masa en términos de la energía cinética de traslación y rotación junto al potencial gravitatorio, dando lugar a un Lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = T_{cm} + T_{rot}^{(cm)} - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta = \frac{1}{2}(ml^2 + I_0)\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta\ ,$$

lo cual es equivalente a describir una energía cinética de traslación nula en el punto fijo del cuerpo rígido, es decir que, $T_O = 0$, junto con ap Steiner al momento de inercia de forma tal que $I_O = I_0 + ml^2$, luego

$$\mathcal{L} = T_{rot}^{(O)} - U = \frac{1}{2}(ml^2 + I_0)\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta\ ,$$

siendo ambas descripciones son totalmente equivalentes. Por otra parte, el momento armónico conjugado p_θ, el Hamiltoniano del sistema y las ecuaciones de Hamilton serán

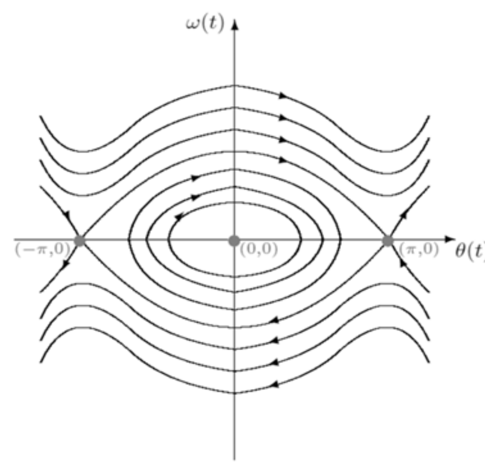
$$p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = (ml^2 + I_0)\dot{\theta}\ , \qquad H = p_\theta\dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{p_\theta^2}{2(ml^2 + I_0)} - mgl\cos\theta\ ,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2 + I_0}\ , \qquad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = -mgl\sin\theta,$$

derivando y resolviendo las ecuaciones de Hamilton se obtiene una ecuación de movimiento en θ como

$$\ddot{\theta} + \Omega_0^2\sin\theta = 0\ , \qquad \Omega_0^2 = \frac{mgl}{ml^2 + I_0}\ ,$$

lo cual corresponde a la ecuación del péndulo físico que, en pequeñas oscilaciones $\theta \ll 1$, se recupera la solución del oscilador armónico con frecuencia Ω_0 y solución dada por $\theta(t) = A\cos(\Omega_0 t + \alpha)$.



Efectuando un diagrama de fases (θ, p_θ) es posible hacer un estudio de la evolución del sistema para distintas condiciones iniciales (en el gráfico se considera que $p_\theta \propto \omega$). Puede observarse que, para valores iniciales suficientemente pequeños de p_θ, el cuerpo rígido se comporta como un oscilador armónico en torno a un punto de equilibrio en (0,0), lo que implica que oscila entre valores máximos $\pm\theta$. Mientras que si p_θ es lo suficientemente grande, el diagrama de fases nos muestra como θ crece indefinidamente, lo que implica que el cuerpo rígido da vueltas completas sin cesar, variando únicamente p_θ entre máximos y mínimos valores.

---

9. Se supone una fuerza de magnitud $F_0 = cte$ en el plano (dirección $\hat{r}$), de forma que deriva de un potencial como

$$\bar{F} \equiv F_0\,\hat{r}_{(x,y)} = -\nabla U \Longrightarrow U(r) = -F_0 r\ ,$$

donde $r \equiv r(x,y)$. De esta forma el Lagrangiano quedará escrito en coordenadas generalizadas x, y como

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y} + F_0 r\ ,$$

luego, los momentos conjugados p_x, p_y y el Hamiltoniano serán

$$p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x}\ , \qquad p_y = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\dot{y}\ , \qquad H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} - F_0 r\ ,$$

derivando se obtienen las cuatro ecuaciones de Hamilton resultantes como

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -F_0 \frac{\partial r}{\partial x}, \qquad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \qquad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -F_0 \frac{\partial r}{\partial y},$$

de las cuales se verifica que si $r \equiv r(x)$ la coordenada y es ignorable, pues $\dot{p}_y \equiv 0$; si $r \equiv r(y)$ la coordenada x es ignorable, pues $\dot{p}_x \equiv 0$; mientras que si $r \equiv r(x, y)$, ninguna coordenada x, y resulta ignorable.

---

10. Primeramente, se describen las posiciones y velocidades de las masas en coordenadas cartesianas

$$\bar{r}_1 = y\hat{y} \Longrightarrow \dot{\bar{r}}_1 = \dot{y}\hat{y}, \qquad \bar{r}_2 = (y + x + l_e)\hat{y} \Longrightarrow \dot{\bar{r}}_2 = (\dot{y} + \dot{x})\hat{y}, \qquad \bar{r}_3 = y_M\hat{y} \Longrightarrow \dot{\bar{r}}_3 = \dot{y}_M\hat{y},$$

considerando que la polea no tiene masa ni fricción, la longitud de la soga aporta las condiciones de vínculo

$$L = 2\pi R + y + y_M \Longrightarrow \dot{y}_M = -\dot{y},$$

mientras que la posición de equilibrio l_e para $x = 0$ ($\dot{x} = \dot{y} = 0$) se relaciona con la longitud natural l_0 como

$$\sum F_x = mg - k(l_e - l_0) = 0 \Longrightarrow l_e - l_0 = \frac{mg}{k},$$

lo que permite reconstruir el Lagrangiano del sistema total, quedando éste en coordenadas x, y como

$$\mathcal{L} = T_1 + T_2 + T_M - (U_1 + U_2 + U_M + U_e),$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{y}^2 + \frac{m}{2}(\dot{y} + \dot{x})^2 + m\dot{y}^2 - \left(-mgy - mg(y + x + l_e) - 2mg(L - 2\pi R - y) + \frac{1}{2}k(x + l_e - l_0)^2\right),$$

mientras que, usando la relación de equilibrio $l_e - l_0 = mg/k$ y despreciando constantes, el Lagrangiano será

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{3}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{y} + \dot{x})^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Por otra parte, se sabe el Hamiltoniano del sistema vendrá escrito como

$$H = p_y\dot{y} + p_x\dot{x} - \mathcal{L} = p_y\dot{y} + p_x\dot{x} - \left(\frac{3}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{y} + \dot{x})^2 - \frac{1}{2}kx^2\right),$$

por lo que es necesario obtener del Lagrangiano los momentos conjugados y sus relaciones de interés

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m(\dot{y} + \dot{x}), \qquad p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = 3m\dot{y} + m(\dot{y} + \dot{x}),$$

$$(\dot{y} + \dot{x}) = \frac{p_x}{m}, \qquad \dot{y} = -\frac{p_x - p_y}{3m}, \qquad \dot{x} = \frac{4p_x - p_y}{3m},$$

lo que permite resolver el Hamiltoniano del sistema en términos de x y su momento conjugado p_x como

$$H(x, p_x, p_y) = \frac{1}{2m}\left(\frac{(p_x - p_y)^2}{3} + p_x^2\right) + \frac{1}{2}kx^2.$$

Del Hamiltoniano se obtienen las cuatro ecuaciones de Hamilton dadas por

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{4p_x - p_y}{3m}, \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx,$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = -\frac{p_x - p_y}{3m}, \qquad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

verificándose que y es una coordenada ignorable, pues $\dot{p}_y = 0$ de forma que $p_y = \alpha = cte$, en cuyo caso es posible reescribir el Hamiltoniano en su variante unidimensional en x como

$$H(x, p_x, \alpha) = \frac{1}{2m}\left(\frac{(p_x - \alpha)^2}{3} + p_x^2\right) + \frac{1}{2}kx^2 \,.$$

De las ecuaciones de Hamilton es posible derivar las ecuaciones de movimiento en x, y como

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \,, \qquad \omega_0^2 = \frac{4k}{3m} \,, \qquad x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{y} = -\frac{p_x}{3m} = -\frac{\dot{x}}{4} \,, \qquad y(t) = cte - \frac{x_0}{4}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \,,$$

aplicando las condiciones iniciales $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$, se resuelve finalmente que

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \,, \qquad y(t) = y_0 + \frac{x_0}{4}(1 - \cos(\omega_0 t)) = y_0 + \frac{x_0}{2}\sin^2\left(\frac{\omega_0}{2}t\right).$$