---

1. Se considerará un sistema inercial de modo que x mida la posición del centro de masa del yoyo. El Lagrangiano vendrá escrito en términos de la energía cinética traslacional y rotacional, así como del potencial gravitatorio. La velocidad angular correspondiente a la energía cinética rotacional debe escribirse en términos de la posición x del centro de masa, que puede relacionarse con la rodadura del mismo como

$$\bar{v}_{cm} = \bar{v}_{rod} + \bar{\omega} \times (\bar{y} - \bar{y}_r) = (-\omega\hat{z}) \times \big(-(-R\hat{y})\big) = \omega R\hat{x} \Longrightarrow \dot{x} = \omega R \ ,$$

hecho esto es posible reescribir el Lagrangiano en términos de una única coordenada generalizada x como

$$\mathcal{L} = T - U = \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2\right) - (-mgx) = \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2\right) + mgx \ = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 + mgx \ ,$$

lo que permite por último definir la acción S y encontrar la ecuación de Euler-Lagrange para el movimiento como

$$S = \int \mathcal{L}(t,x,\dot{x})dt \Longrightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) \Longrightarrow mg = \frac{3}{2}m\ddot{x} \Longrightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3}g \ .$$

---

2. En forma equivalente al ejercicio anterior, se pasa a la coordenada generalizada x, se construye la acción S y se halla la ecuación de Euler-Lagrange para el movimiento. Por tanto,

$$\mathcal{L} = T - U = \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2\right) - (-mgx) = \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2\right) + mgx = \frac{1}{2}\dot{x}^2\left(m + \frac{I_{cm}}{R^2}\right) + mgx \ ,$$

$$S = \int \mathcal{L}(t,x,\dot{x})dt \Longrightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) \Longrightarrow mg = \ddot{x}\left(m + \frac{I_{cm}}{R^2}\right) \Longrightarrow \ddot{x} = \frac{g}{1 + I_{cm}/mR^2} \ .$$

---

3. La posición x_r del carrito de masa m, escrita desde un sistema inercial, viene en términos de la posición X del carro grande y de la posición relativa x del carrito dentro del carro grande. Puntualmente, desde el sistema inercial, el carrito de masa m tiene su posición en $x_r = X + x$. Por otra parte, la energía cinética viene como $T(\dot{x}_r)$ y la potencial elástica como $U(x)$, se buscará reescribir el Lagrangiano $\mathcal{L}$ en términos de $t, x, \dot{x}$ como

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}_r^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\big(\dot{X} + \dot{x}\big)^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x} - A\omega\sin(\omega t))^2 - \frac{1}{2}kx^2 \ ,$$

habiéndose obtenido $\mathcal{L}(t,x,\dot{x})$, se puede plantear la acción y obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange como

$$S = \int \mathcal{L}(t,x,\dot{x})dt \Longrightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) \Longrightarrow -kx = \frac{d}{dt}(m\dot{x} - mA\omega\sin(\omega t)) \Longrightarrow -kx = m\ddot{x} - mA\omega^2\cos(\omega t) \ ,$$

lo que finalmente permite reescribir la ecuación de movimiento del oscilador armónico forzado como

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = B\cos(\omega t) \ , \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m} \ , \qquad B = A\omega^2 \ .$$

---

4. (a) Se considerará un sistema coordenado inercial (x_1, y_1) y (x_2, y_2) para indicar la posición de cada una de las partículas. De esta forma, el Lagrangiano vendrá escrito en términos de la energía cinética $T = T_1 + T_2$, de la energía potencial del resorte U_k y de la energía potencial gravitatoria de las masas $U_g = U_{g_1} + U_{g_2}$ como

$$\mathcal{L} = T - U = \left(\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)\right) - \left(\frac{1}{2}k\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l_0\right)^2 - m_1 g(x_1 - l) - m_2 g(x_2 - l)\right).$$

Se elegirá el sistema de coordenadas de modo que el origen esté en el extremo opuesto de la barra de la masa m_1, considerando luego que el otro extremo de la masa m_2 dista en $d\hat{y}$ respecto del origen. Luego es posible redefinir, dado el vínculo radial de cada masa, el sistema en coordenadas generalizadas θ_1, θ_2 como

$$\begin{cases} (x_1, y_1) = (l\cos\theta_1\,, l\sin\theta_1) \\ (x_2, y_2) = (l\cos\theta_2\,, d + l\sin\theta_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\dot{x}_1, \dot{y}_1) = \left(-l\dot{\theta}_1\sin\theta_1\,, l\dot{\theta}_1\cos\theta_1\right) \\ (\dot{x}_2, \dot{y}_2) = \left(-l\dot{\theta}_2\sin\theta_2\,, l\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right) \end{cases},$$

lo que permite reescribir el Lagrangiano en términos de dichas coordenadas generalizadas θ_1, θ_2 como

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m_1 l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}k\left(r_{(\theta_1,\theta_2)} - l_o\right)^2 + m_1 gl(\cos\theta_1 - 1) + m_2 gl(\cos\theta_2 - 1)\,,$$

$$r_{(\theta_1,\theta_2)} = \sqrt{d^2 + 2dl(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) + 2l^2(1 - \cos(\theta_2 - \theta_1))}\,.$$

Planteando luego las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada par de coordenadas generalizadas se obtiene

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1} = kl(d\cos\theta_2 + l\sin(\theta_2 - \theta_1))\left(1 - \frac{l_0}{r_{(\theta_1,\theta_2)}}\right) - m_1 gl\sin\theta_1\;, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_1 l^2\dot{\theta}_1\right) = m_1 l^2\ddot{\theta}_1\,,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_2} = -kl(d\cos\theta_2 + l\sin(\theta_2 - \theta_1))\left(1 - \frac{l_0}{r_{(\theta_1,\theta_2)}}\right) - m_2 gl\sin\theta_2\;, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_2 l^2\dot{\theta}_2\right) = m_2 l^2\ddot{\theta}_2\,,$$

de esta forma, las ecuaciones del movimiento de ambas partículas quedarán escritas como

$$\ddot{\theta}_1 - \frac{1}{m_2}\left(\frac{k}{l}\right)(d\cos\theta_2 + l\sin(\theta_2 - \theta_1))\left(1 - \frac{l_0}{r_{(\theta_1,\theta_2)}}\right) + \frac{g}{l}\sin\theta_1 = 0\,,$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{m_2}\left(\frac{k}{l}\right)(d\cos\theta_2 + l\sin(\theta_2 - \theta_1))\left(1 - \frac{l_0}{r_{(\theta_1,\theta_2)}}\right) + \frac{g}{l}\sin\theta_2 = 0\,,$$

de lo que restará hacer alguna aproximación o resolución numérica para obtener la solución $\theta_1(t), \theta_2(t)$.

(b) Nuevamente se describirá en términos de un sistema inercial (x, y) siendo el Lagrangiano escrito como

$$\mathcal{L} = T - U = \left(\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\right) - \left(\frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0\right)^2 - mgx\right),$$

dado que $x(t), y(t)$ ya son coordenadas generalizadas, pues describen unívocamente la posición de la partícula m en el plano, es posible plantear las ecuaciones de Euler-Lagrange obteniéndose que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -kx\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + mg\;, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = m\ddot{x}\,, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = -ky\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\right) = m\ddot{y}\,,$$

de lo que se recuperan las ecuaciones de movimiento para x, y como

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)x - mg = 0\,, \qquad \ddot{y} + \frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)y = 0\,.$$

En forma totalmente equivalente se podría haber planteado el Lagrangiano en términos de las coordenadas generalizadas r, θ, lo que permite obtener resultados totalmente equivalentes a los anteriores, luego

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \left(\frac{1}{2}k(r - l_0)^2 - mg(r\cos\theta - l_0)\right),$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - k(r - l_0) + mg\cos\theta\;, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) = m\ddot{r}\,, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = mgr\sin\theta\;, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}\,,$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}(r - l_0) + g\cos\theta = 0\,, \qquad \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - g\sin\theta = 0\,.$$

(c) Nuevamente se plantea el Lagrangiano desde un sistema inercial ubicado en el extremo del resorte como

$$\mathcal{L} = T - U = \left(\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)\right) - \left(\frac{1}{2}k\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - l_0\right)^2 - m_1 g x_1 - m_2 g x_2\right)$$

planteando las relaciones entre las coordenadas absolutas x_2, y_2 y las relativas x_2', y_2' (respecto de m_2) se tiene

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + x_2' = r_1\cos\theta_1 + l\cos\theta_2 \\ y_2 = y_1 + y_2' = r_1\sin\theta_1 + l\sin\theta_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2' = \dot{r}_1\cos\theta_1 - r_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - l\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + \dot{y}_2' = \dot{r}_1\sin\theta_1 + r_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \end{cases},$$

lo que permite reescribir el Lagrangiano en términos de coordenadas generalizadas r_1, θ_1, θ_2 como

$$\mathcal{L} = T - U = \left(\frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\theta}_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\theta}_1^2 + l^2\dot{\theta}_2^2\right)\right) - \left(\frac{1}{2}k(r_1 - l_0)^2 - m_1 g r_1\cos\theta_1 - m_2 g(r_1\cos\theta_1 + l\cos\theta_2)\right),$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2 g r_1\cos\theta_1 - \frac{k(r_1 - l_0)^2}{m_1 + m_2}\right) + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\theta}_2^2 + 2gl\cos\theta_2\right),$$

planteando luego las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r_1} = (m_1 + m_2)\left(r_1\dot{\theta}_1^2 + g\cos\theta_1 - \frac{k(r_1 - l_0)}{m_1 + m_2}\right), \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{r}_1,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1} = -(m_1 + m_2) g r_1\sin\theta_1, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\right) = (m_1 + m_2)\left(2r_1\dot{r}_1\dot{\theta}_1 + r_1^2\ddot{\theta}_1\right),$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_2} = -m_2 g l\sin\theta_2, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\right) = m_2 l^2\ddot{\theta}_2,$$

lo que permite igualar y obtener las ecuaciones de movimiento de ambos cuerpos como

$$\ddot{r}_1 + k(r_1 - l_0) - (m_1 + m_2) r_1\dot{\theta}_1^2 + (m_1 + m_2) g\cos\theta_1 = 0,$$

$$\ddot{\theta}_1 + 2\left(\frac{\dot{r}_1}{r_1}\right)\dot{\theta}_1 + \frac{g}{r_1}\sin\theta_1 = 0,$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l}\sin\theta_2 = 0.$$

---

5. Primeramente se describe la posición de la masa m en coordenadas absolutas $\bar{r}$ centradas en el volante. Dicha posición vendrá descripta en términos de las posiciones $\bar{r}_{OP}$ y $\bar{r}_{PC}$ de forma que $\bar{r}$ y su derivada son

$$\bar{r} = \bar{r}_{OP} + \bar{r}_{PC} = (R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}) + (l\sin(\phi)\,\hat{x} - l\cos(\phi)\,\hat{y})$$

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_{OP} + \dot{\bar{r}}_{PC} = (-R\omega\sin(\omega t)\,\hat{x} + R\omega\cos(\omega t)\,\hat{y}) + \left(l\dot{\phi}\cos(\phi)\,\hat{x} + l\dot{\phi}\sin(\phi)\,\hat{y}\right)$$

obtenida una única coordenada generalizada ϕ se escribe el Lagrangiano en términos de ϕ como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 - (mg\bar{r}\cdot\hat{y}) = \frac{1}{2}m\left(\left(-R\omega\sin(\omega t) + l\dot{\phi}\cos(\phi)\right)^2 + \left(R\omega\cos(\omega t) + l\dot{\phi}\sin(\phi)\right)^2\right) - \left(mg(R\sin(\omega t) - l\cos(\phi))\right),$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(t, \phi, \dot{\phi}\right) = \frac{mR^2}{2}\omega^2 + \frac{ml^2}{2}\dot{\phi}^2 + mRl\omega\dot{\phi}\sin(\phi - \omega t) - mgR\sin(\omega t) + mgl\cos(\phi),$$

con lo cual se puede efectuar la ecuación de Euler Lagrange para $\mathcal{L}\left(t, \phi, \dot{\phi}\right)$ como

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = mRl\omega\cos(\phi - \omega t)\,\dot{\phi} - mgl\sin(\phi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right)=\frac{d}{dt}\big(ml^2\dot{\phi}+mRl\omega\sin(\phi-\omega t)\big)=ml^2\ddot{\phi}+mRl\omega\cos(\phi-\omega t)\left(\dot{\phi}-\omega\right),$$

obteniéndose, luego de igualar, la ecuación de movimiento de la partícula en términos de $t,\phi,\dot{\phi}$ que será

$$\ddot{\phi}-\frac{R\omega^2}{l}\cos(\phi-\omega t)\,\dot{\phi}+\frac{g}{l}\sin(\phi)=0\,,$$

simplificando para el caso en que $\omega=0$ se puede recuperar la ecuación del péndulo

$$\ddot{\phi}+\frac{g}{l}\sin(\phi)=0\,.$$

---

6. Se plantean las coordenadas en sistema inercial, siendo $\bar{r}_1$ la posición del carrito, $\bar{r}_2$ la posición del péndulo y $\bar{r}_{12}$ la posición relativa entre el péndulo y el carrito. Pasando a coordenadas generalizadas x,ϕ se obtiene que

$$\bar{r}_2=\bar{r}_1+\bar{r}_{12}=(x\hat{x})+(L\sin\phi\,\hat{x}-L\cos\phi\,\hat{y})=(x+L\sin\phi)\hat{x}-L\cos\phi\,\hat{y}\,,$$

$$\dot{\bar{r}}_1=\dot{x}\hat{x},\qquad \dot{\bar{r}}_2=\big(\dot{x}+L\dot{\phi}\cos\phi\big)\hat{x}+L\dot{\phi}\sin\phi\,\hat{y}\,,$$

lo que permite escribir el Lagrangiano en términos de la energía cinética del carrito y del péndulo, la energía potencial del resorte y la energía potencial gravitatoria del péndulo, obteniéndose

$$\mathcal{L}=T-U=\frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}_1^2+\frac{1}{2}M\dot{\bar{r}}_2^2-(k\bar{r}_1\cdot\hat{x}+Mg\bar{r}_2\cdot\hat{y})=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}M\big(\dot{x}+L\dot{\phi}\cos\phi\big)^2+\frac{1}{2}M\big(L\dot{\phi}\sin\phi\big)^2-\frac{1}{2}kx^2+MgL\cos\phi\,,$$

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}\big(x,\dot{x},\phi,\dot{\phi},t\big)=\frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2+\frac{1}{2}ML^2\dot{\phi}^2+ML\cos\phi\,\big(\dot{x}\dot{\phi}+g\big)-\frac{1}{2}kx^2\,,$$

planteando luego las dos ecuaciones de Euler-Lagrange para $\mathcal{L}\big(x,\dot{x},\phi,\dot{\phi},t\big)$ se tiene que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=-kx\,,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}\Big((m+M)\dot{x}+ML\dot{\phi}\cos\phi\Big)=(m+M)\ddot{x}+ML\ddot{\phi}\cos\phi-ML\dot{\phi}^2\sin\phi\,,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=-ML\sin\phi\,\big(\dot{x}\dot{\phi}+g\big)\,,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right)=\frac{d}{dt}\big(ML^2\dot{\phi}+ML\dot{x}\cos\phi\big)=ML^2\ddot{\phi}+ML\ddot{x}\cos\phi-ML\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi\,,$$

lo que permite igual y obtener las ecuaciones de movimiento del péndulo como

$$(m+M)\ddot{x}+kx+ML\big(\ddot{\phi}\cos\phi-\dot{\phi}^2\sin\phi\big)=0\,,\qquad L\ddot{\phi}+\ddot{x}\cos\phi+g\sin\phi=0\,.$$

Aproximando las ecuaciones en pequeños desplazamientos $\phi\ll$ usando $\cos\phi\approx 1$ y $\sin\phi\approx\phi\approx 0$ se tiene

$$(m+M)\ddot{x}+kx+ML\ddot{\phi}=0\,,\qquad L\ddot{\phi}+\ddot{x}+g\phi=0\,,$$

por último, se pueden reordenar las ecuaciones y simplificarlas de modo que sean de orden 4 como

$$\begin{cases} x=\left(\dfrac{mL}{k}\right)\phi^{(2)}+(M+m)\left(\dfrac{g}{k}\right)\phi \\ \phi=\left(\dfrac{m}{Mg}\right)x^{(2)}+\left(\dfrac{k}{Mg}\right)x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^{(2)}=\left(\dfrac{mL}{k}\right)\phi^{(4)}+(M+m)\left(\dfrac{g}{k}\right)\phi^{(2)} \\ \phi^{(2)}=\left(\dfrac{m}{Mg}\right)x^{(4)}+\left(\dfrac{k}{Mg}\right)x^{(2)} \end{cases},$$

$$x^{(4)}+\ \beta x^{(2)}+\gamma x=0\,,\qquad x^{(4)}+\beta x^{(2)}+\gamma x=0\,,\qquad \gamma=\frac{g}{L}\frac{k}{m}\,,\beta=\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m}+\frac{M}{m}\frac{g}{L}\right).$$

---

7. La posición de la partícula de masa m puede ser representada por una única coordenada generalizada ρ como

$$\bar{r}=(\rho\cos(\omega t)\,,\rho\sin(\omega t)\,,k\rho^2)\,,\qquad \dot{\bar{r}}=(\dot{\rho}\cos(\omega t)-\rho\omega\sin(\omega t)\,,\dot{\rho}\sin(\omega t)+\rho\omega\cos(\omega t)\,,2k\rho\dot{\rho})\,,$$

planteando con esto la energía cinética y potencial gravitatoria se obtiene el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 - (mg\dot{\bar{r}}\cdot\hat{z}) = \frac{1}{2}m((\dot{\rho}\cos(\omega t) - \rho\omega\sin(\omega t))^2 + (\dot{\rho}\sin(\omega t) + \rho\omega\cos(\omega t))^2 + (2k\rho\dot{\rho})^2) - mgk\rho^2 \ ,$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\rho,\dot{\rho},t) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + 2mk^2\rho^2\dot{\rho}^2 - mgk\rho^2,$$

dado que ρ es coordenada generalizada es válido aplicar Euler-Lagrange, luego

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} = m\omega^2\rho + 4mk^2\rho\dot{\rho}^2 - 2mgk\rho \ ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{\rho} + 4mk^2\rho^2\dot{\rho}) = m\ddot{\rho} + 8mk^2\rho\dot{\rho}^2 + 4mk^2\rho^2\ddot{\rho} \ ,$$

lo que resulta en la ecuación de movimiento de la partícula como

$$(4k^2\rho^2 + 1)\ddot{\rho} + (4k^2\rho)\dot{\rho}^2 = (\omega^2 - 2gk)\rho \ .$$

Las posiciones de equilibrio deben cumplir que $\ddot{\rho} = \dot{\rho} = 0$, lo que es equivalente a pensar que una partícula tiene energía potencial nula $(V_\rho = 0)$ y energía cinética nula $(T_{\dot{\rho}} = 0)$, por lo que la aceleración $\ddot{\rho}$ también es nula. Aplicando esta consideración a la ecuación de movimiento, la posición de equilibrio ρ deberá cumplir que

$$(\omega^2 - 2gk)\rho = 0 \ ,$$

de modo que $\rho = 0$ es posición de equilibrio, o bien si $\omega^2 = 2gk$ cualquier ρ es posición de equilibrio. Considerando el caso en que $\rho = 0$ en la ecuación de movimiento, se busca analizar la estabilidad para apartamientos $\rho \ll$, por lo cual se despreciarán término de orden superior a ρ (puntualmente, $\rho^2 \approx 0$), luego

$$\ddot{\rho} = (\omega^2 - 2gk)\rho \ ,$$

de lo que puede observarse que si $\omega^2 < 2gk$ se tiene un equilibrio estable ($\ddot{\rho} < 0$), mientras que si $\omega^2 > 2gk$ se tiene un equilibrio inestable ($\ddot{\rho} > 0$). El caso en que $\omega^2 = 2gk$ la posición de equilibrio puede tomar cualquier valor de ρ, por lo que reemplazando $\omega^2 = 2gk$ en la ecuación de movimiento y despejando se obtiene que

$$\ddot{\rho} = -\frac{4k^2\dot{\rho}^2}{(4k^2\rho^2 + 1)}\rho \ ,$$

y, como $\rho > 0$ por definición, si $\omega^2 = 2gk$ cualquier valor de ρ es posición de equilibrio estable.

---

8. En primer lugar se define el sistema coordenado inercial para la partícula m, en esféricas se obtendrá que

$$\bar{r} = (\rho\sin\alpha\cos\phi \, , \rho\sin\alpha\sin\phi \, , \rho\cos\alpha) \ ,$$

$$\dot{\bar{r}} = \left(\dot{\rho}\sin\alpha\cos\phi - \rho\dot{\phi}\sin\alpha\sin\phi \, , \dot{\rho}\sin\alpha\sin\phi + \rho\dot{\phi}\sin\alpha\cos\phi \, , \dot{\rho}\cos\alpha\right) ,$$

hecho esto, se puede definir el Lagrangiano en términos de la energía cinética y potencial gravitatoria como

$$\mathcal{L} = T - U = \left(\frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2\right) - (mg\bar{r}\cdot\hat{z}) = \frac{1}{2}m((\dot{\rho}\sin\alpha\cos\phi - \rho\sin\alpha\sin\phi)^2 + (\dot{\rho}\sin\alpha\sin\phi + \rho\sin\alpha\cos\phi)^2 + (\dot{\rho}\cos\alpha)^2) - (mg\rho\cos\alpha) \ ,$$

$$\mathcal{L}\left(t,\rho,\dot{\rho},\phi,\dot{\phi}\right) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\left(\rho\sin(\alpha)\,\dot{\phi}\right)^2 - mg\rho\cos(\alpha) \ ,$$

de forma que, siendo ρ, ϕ coordenadas generalizadas del sistema, se puede plantear Euler-Langrange como

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} = m\rho\dot{\phi}^2\sin^2\alpha - mg\cos\alpha \ , \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}}\right) = m\ddot{\rho} \ ,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \ , \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot{\phi}\sin^2\alpha\right) .$$

De la última ecuación de movimiento puede verificarse que $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$ es constante y, por tanto, independiente del tiempo. En tal caso se dirá que ϕ es una coordenada cíclica y que $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$ es una magnitud conservada. Puede relacionarse $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$ con la magnitud conservada del momento angular $L \equiv L_z$. Para ello se considera $\bar{L}$ como

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = m\bar{r} \times \dot{\bar{r}} = m(\rho\hat{\rho}) \times \left(\rho\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \rho\dot{\phi}\sin(\theta)\,\hat{\phi}\right) = -m\rho^2\left(\dot{\theta}\hat{\phi} + \dot{\phi}\sin(\theta)\,\hat{\theta}\right),$$

luego usando que, para este problema, $\theta = \alpha = cte$, se puede plantear el momento angular $\bar{L}$ como

$$\bar{L} = -m\rho^2\dot{\phi}\sin(\alpha)\,\hat{\theta} = -m\rho^2\dot{\phi}\sin(\alpha)\,(\cos(\alpha)\cos(\phi)\,\hat{x} + \cos(\alpha)\sin(\phi)\,\hat{y} - \sin(\alpha)\,\hat{z}) = L_x\hat{x} + L_y\hat{y} + L_z\hat{z},$$

de lo que se observa que $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi} = L_z = cte$ es una magnitud conservada dada por

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = L_z = m\rho^2\dot{\phi}\sin^2\alpha = cte,$$

reemplazando este resultado en la ecuación radial de movimiento se llega a que

$$\ddot{\rho} = \left(\frac{L_z}{m\sin\alpha}\right)^2\frac{1}{\rho^3} - g\cos\alpha,$$

o, en forma equivalente, se define un potencial efectivo unidimensional en ρ dado como

$$U_{eff} = \frac{L_z^2}{2m\rho^2\sin^2\alpha} + U(\rho) = \frac{L_z^2}{2m\rho^2\sin^2\alpha} + mg\rho\cos(\alpha).$$

En caso de haber órbitas circulares $\rho = \rho_0 = cte$, por lo que $\ddot{\rho} = 0$, luego el radio orbital quedará escrito como

$$\rho_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{g cos\,\alpha}\left(\frac{L_z}{m\sin\alpha}\right)^2},$$

del mismo modo, suponiendo conocido ρ_0 y usando que $L_z = m\rho_0^2\dot{\phi}_0\sin^2\alpha$, la velocidad de la partícula será

$$v_0 = \rho_0\dot{\phi}_0 = \pm\sqrt{\rho_0 g\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}.$$

(c) Siendo conocidos $\rho_{(0)}, \dot{\phi}_{(0)}$ es posible determinar la cantidad conservada del momento angular en z como

$$L_z = m\rho_{(0)}^2\dot{\phi}_{(0)}\sin^2\alpha = ma^2\left(2\sqrt{\frac{g}{a}\sqrt{3}}\right)\frac{1}{4} = \frac{m}{2}\sqrt{a^3 g\sqrt{3}},$$

lo cual permite determinar una ecuación radial de movimiento sólo en términos de $\ddot{\rho}, \rho$, entonces

$$\ddot{\rho} = \dot{\rho}\frac{d\dot{\rho}}{d\rho} = g\sqrt{3}\left(\frac{a}{\rho}\right)^3 - g\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}ga^3\left(\frac{1}{a^3} - 2\frac{1}{\rho^3}\right),$$

usando que $\ddot{\rho} = \dot{\rho}\,d\dot{\rho}/d\rho$, que $\dot{\rho}_{(0)} = 0$ y que $\rho_{(0)} = a$ es posible resolver la velocidad radial $\dot{\rho}$ como

$$\int_0^{\dot{\rho}}\dot{\rho}\,d\dot{\rho} = -\frac{\sqrt{3}}{2}ga^3\int_a^{\rho}\left(\frac{1}{a^3} - 2\frac{1}{\rho^3}\right)d\rho \Longrightarrow \dot{\rho}^2 = \sqrt{3}ga\left(2 - \frac{\rho}{a} - \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-2}\right),$$

dado que en los radios mínimos y máximos la velocidad radial $\dot{\rho} = 0$ resta resolver los ceros de la última ecuación. Suponiendo que $\chi = \rho/a$, restaría resolver la ecuación $\chi - 2 + \chi^{-2} = 0$, luego

$$\chi^3 - 2\chi^2 + 1 = (\chi - 1)(\chi^2 - \chi - 1) = (\chi - 1)\left(\chi - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\chi - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

de modo que los radios mínimo ρ_m y máximo ρ_M vendrán determinados como

$$\rho_m = a\,, \qquad \rho_M = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

---

9. La posición de la bola medida desde A vendrá dada por la posición $\bar{r}_1$ del centro del aro sumada a la posición relativa $\bar{r}_2$ de la bola, medida desde el centro del aro, de la masa, es decir,

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 = (R\cos(\theta)\,\hat{x} + R\sin(\theta)\,\hat{y}) + (R\cos(\phi+\theta)\,\hat{x} + R\sin(\phi+\theta)\,\hat{y})\,,$$

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_1 + \dot{\bar{r}}_2 = \left(-R\dot{\theta}\sin(\theta)\,\hat{x} + R\dot{\theta}\cos(\theta)\,\hat{y}\right) + \left(-R(\dot{\phi}+\dot{\theta})\sin(\phi+\theta)\,\hat{x} + R(\dot{\phi}+\dot{\theta})\cos(\phi+\theta)\,\hat{y}\right),$$

luego, usando que $\theta = \omega t$, es posible reescribir el Lagrangiano en términos de la energía cinética de la bola como

$$\mathcal{L}(t,\phi,\dot{\phi}) = \frac{m}{2}\dot{\bar{r}}^2 = \frac{m}{2}\left(\left(R\omega\sin(\omega t) + R(\dot{\phi}+\omega)\sin(\phi+\omega t)\right)^2 + \left(R\omega\cos(\omega t) + R(\dot{\phi}+\omega)\cos(\phi+\omega t)\right)^2\right),$$

$$\mathcal{L}(t,\phi,\dot{\phi}) = \frac{mR^2}{2}\left(\omega^2 + (\dot{\phi}+\omega)^2 + 2\omega(\dot{\phi}+\omega)\cos\phi\right),$$

dado que ϕ es coordenada generalizada del problema, usando las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -mR^2\omega(\dot{\phi}+\omega)\sin\phi\,, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(mR^2\left(\dot{\phi} + \omega(1+\cos\phi)\right)\right) = mR^2(\ddot{\phi} - \omega\dot{\phi}\sin\phi)\,,$$

de forma que la ecuación de movimiento será la equivalente a la de un péndulo, siendo

$$\ddot{\phi} + \omega^2\sin\phi = 0\,,$$

aplicando además pequeñas oscilaciones, se obtiene la solución del oscilador harmónico a frecuencia ω como

$$\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0 \Longrightarrow \phi(t) = A\sin(\omega t + \alpha)\,.$$

---

10. Se plantea la variación $\Delta\mathcal{L}$ del Lagrangiano ante una pequeña rotación ε aplicada por igual a todas las partículas del sistema. Para ello también se plantea un desarrollo a primer orden, válido pues $\varepsilon \ll$, luego

$$\Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\bar{r},\bar{\theta},\bar{\phi}) - \mathcal{L}(\bar{r},\bar{\theta},\bar{\phi}+\bar{\varepsilon}) = \sum\nolimits_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\varepsilon = 0 \Longrightarrow \sum\nolimits_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} = 0\,,$$

dado que $\bar{r},\bar{\theta},\bar{\phi}$ son coordenadas generalizadas, es válido aplicar Euler-Lagrange, por lo que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_i}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum\nolimits_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_i}\right) = 0 \Longrightarrow \sum\nolimits_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_i} = cte\,,$$

de lo que se desprende que la cantidad $\sum\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}_i$ es una cantidad conservada que puede relacionarse, en coordenadas esféricas, con el momento angular L_z. Considerando las coordenadas esféricas en forma explícita

$$\bar{r}(r,\theta,\phi) = (x,y,z)\,, \qquad x = r\sin\theta\cos\phi\,, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi\,, \qquad z = r\cos\theta\,,$$

$$\dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\,,$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi\,,$$

$$\dot{z} = \dot{r}\cos\theta + r\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi\,,$$

lo que permite reconstruir el Lagrangiano $\mathcal{L}$ en esféricas en términos de la energía cinética y potencial como

$$\mathcal{L} = T - U = \sum\nolimits_i \frac{1}{2}m_i\left(\dot{r}_i^2 + r_i^2\dot{\theta}_i^2 + r_i^2\dot{\phi}_i^2\sin^2(\theta_i)\right) - \sum\nolimits_i U(r_i,\theta_i,\phi_i)\,,$$

derivando la expresión respecto de $\dot{\phi}_i$ se explicita la cantidad conservada dada con anterioridad como

$$\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i} = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\phi}_i \sin^2(\theta_i) = \sum_i p_i r_i \phi_i \sin^2(\theta_i) \, .$$

Por otra parte, el momento angular en coordenadas esféricas vendrá dado como

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = m(r\hat{r}) \times \left(r\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin(\theta)\,\hat{\phi}\right) = -mr^2\left(\dot{\theta}\hat{\phi} + \dot{\phi}\sin(\theta)\,\hat{\theta}\right),$$

luego usando que, para este problema, $\theta = cte$, se puede plantear el momento angular $\bar{L}$ como

$$\bar{L} = -m\rho^2\dot{\phi}\sin(\theta)\,\hat{\theta} = -m\rho^2\dot{\phi}\sin(\theta)\,(\cos(\theta)\cos(\phi)\,\hat{x} + \cos(\theta)\sin(\phi)\,\hat{y} - \sin(\theta)\,\hat{z}) = L_x\hat{x} + L_y\hat{y} + L_z\hat{z} \, ,$$

de forma que, para cada partícula i, la cantidad conservada $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}_i$ es exactamente L_{z_i}, de modo que

$$\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i} = \sum_i L_{z_i} = cte \, .$$

---

11. Supóngase un Lagrangiano $\mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ en coordenadas generalizadas, tal que el mismo puede escribirse exactamente como $\mathcal{L} = T_{(\dot{\bar{q}})} - U_{(\bar{q})}$. Si se perturba cada q_i en $q_i + \varepsilon_i$, la variación del Lagrangiano vendrá como

$$\Delta\mathcal{L} = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\Delta q_i = \sum \varepsilon_i \frac{\partial U}{\partial q_i} \, ,$$

dado que son coordenadas generalizadas es posible aplicar a la anterior expresión Euler-Lagrange tal que

$$\Delta\mathcal{L} = \sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\Delta q_i = \frac{d}{dt}\left(\sum \varepsilon_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right),$$

obteniéndose una relación diferencial entre la energía cinética y la potencial, dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\sum \varepsilon_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum \varepsilon_i \frac{\partial U}{\partial q_i} \, ,$$

suponiendo un caso que todo q_i por igual, es decir $q_i + \varepsilon$, y que además las fuerzas son conservativas y no hay fuerzas externas al sistema, se llega a una conservación del momento total de $\dot{\bar{q}}$, obteniéndose

$$F_{ext} = -\nabla U = -\varepsilon \sum \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum \varepsilon_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \Rightarrow \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = cte \Rightarrow P = \sum p_i = \sum m_i \dot{q}_i = cte \, .$$

Para el caso puntual del ejercicio, se plantea el Lagrangiano en términos de la energía cinética y la potencial como

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\left(R\dot{\theta}_i\right)^2\right) - \frac{k}{2}\left((\theta_1 - \theta_n)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\theta_{i+1} - \theta_i)^2\right),$$

luego, se considera que cada partícula i es perturbada por igual e infinitesimalmente de θ_i a $\theta_i + \varepsilon$, esto permite hallar que la variación del Lagrangiano para el problema en cuestión resulta nula, comprobándose que

$$\Delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i}\Delta\theta_i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \frac{\partial U}{\partial \theta_i} = k\varepsilon\left((\theta_1 - \theta_n) + \sum_{i=1}^{n}(-\theta_{i-1} + 2\theta_i - \theta_{i+1})\right) = 0 \, ,$$

usando por último que θ_i son coordenadas generalizadas, se aplica Euler-Lagrange a la anterior expresión, luego

$$\Delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i}\right)\Delta\theta_i = \varepsilon\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i}\right) = 2\varepsilon\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i R^2 \dot{\theta}_i\right) = \frac{\varepsilon}{2R^2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i R^2 \dot{\theta}_i\right) = \frac{\varepsilon}{2R^2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} L_{z_i}\right) = 0 \, ,$$

de lo que puede observarse, dado que la derivada del último término se anula, que la magnitud conservada será

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{z_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i R^2 \dot{\theta}_i = cte\ .$$

---

12. Para la resolución, se considerará un Lagrangiano escrito en coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)\ ,$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m\left(\dot{\rho}^2 + \left(\rho\dot{\theta}\right)^2 + \left(\rho \sin(\theta)\, \dot{\phi}\right)^2\right) - V(\rho, \theta, \phi)\ ,$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m\left(\dot{\rho}^2 + \left(\rho\dot{\theta}\right)^2 + \dot{z}^2\right) - V(\rho, \phi, z)\ ,$$

así como perturbaciones invariantes el potencial dadas como $q_i \to q_i + \varepsilon_i(\bar{q})$, siendo la variación del Lagrangiano

$$\Delta\mathcal{L} = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \cdot \Delta q_i = \sum \varepsilon_i(\bar{q}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}.$$

(a) El potencial invariante cumple $V(x, y, z) = V(x, y, z + \delta)$. Es posible plantear la variación del Lagrangiano $\Delta\mathcal{L}$, luego aplicar Euler-Lagrange y verificar la magnitud conservada como

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \cdot \Delta z = \delta \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = cte\ ,$$

siendo esta última expresión proporcional al momento lineal p_z, el cual se conserva.

(b) El potencial invariante cumple $V(x, y, z) = V(x + 3\delta, y - 2\delta, z + \delta/2)$, luego la variación del Lagrangiano es

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \cdot \Delta z = 3\delta \frac{\partial V}{\partial x} - 2\delta \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial V}{\partial z} = 0\ ,$$

aplicando la relación de Euler-Lagrange a la última ecuación se obtiene que

$$3\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) = 3\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) = 0 \Longrightarrow 3\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - 2\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} + \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = cte\ ,$$

puede relacionarse con que la magnitud $3p_x - 2p_y + p_z/2$ es conservada.

(c) El potencial invariante cumple $V(x, y, z) = V(x, y + z\delta, z - y\delta)$, luego la variación del Lagrangiano es

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \cdot \Delta z = z\delta \frac{\partial V}{\partial y} - y\delta \frac{\partial V}{\partial z} = 0\ ,$$

aplicando la relación de Euler-Lagrange a la última ecuación se obtiene que

$$z\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - y\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) = m\left(z\frac{d\dot{y}}{dt} - y\frac{d\dot{z}}{dt}\right) = m\left(\left(\frac{d(\dot{y}z)}{dt} - \dot{y}\dot{z}\right) - \left(\frac{d(\dot{z}y)}{dt} - \dot{y}\dot{z}\right)\right) = m\frac{d}{dt}(\dot{y}z - \dot{z}y) = 0\ ,$$

luego, $\dot{y}z - \dot{z}y$ es una magnitud conservada proporcional al momento angular L_x (verificar con $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$).

(d) El potencial invariante cumple $V(\rho, \phi, \theta) = V(\rho + \delta, \phi, \theta)$, luego la variación del Lagrangiano es

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \cdot \Delta\rho = \delta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = \delta \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}}\right) \Longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}}\right) = 0\ ,$$

a diferencia de antes, ahora la energía cinética no es invariante respecto de ρ, por lo que cada expresión será

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = \frac{\partial T}{\partial \rho} - \frac{\partial V}{\partial \rho} = \left(m\rho\dot{\theta}^2 + m\rho \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2\right) - 0 = m\rho\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\rho}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\rho}-\frac{\partial V}{\partial \dot\rho}\right)=\left(m\frac{d\dot\rho}{dt}\right)-0=m\ddot\rho\,,$$

igualando ambas expresiones por Euler-Lagrange, se llega a una ecuación diferencial a integrar en $\dot\rho,\rho$ como

$$\ddot\rho=\rho\left(\dot\theta^2+\rho\sin^2\theta\,\dot\phi^2\right)\Longrightarrow\int\dot\rho\,d\dot\rho=\int\rho\left(\dot\theta^2+\rho\sin^2\theta\,\dot\phi^2\right)d\rho\,,$$

definiendo una constante arbitraria de integración y multiplicando indistintamente por m^2 se llega a

$$m^2\left(\dot\rho^2-\left(\rho\dot\theta\right)^2-\left(\rho\sin(\theta)\,\dot\phi\right)^2\right)=m^2\left(v_\rho^2-v_\theta^2-v_\phi^2\right)=p_\rho^2-p_\theta^2-p_\phi^2=cte\,,$$

luego, la magnitud conservada será $p_\rho^2-p_\theta^2-p_\phi^2$ ante invariancias del potencial en ρ.

(e) El potencial invariante cumple $V(\rho,\phi,z)=V(\rho,\phi+\delta,z+5a\delta/8)$, luego puede verificar que el Lagrangiano también resulta invariante en ϕ,z, de forma que

$$\Delta\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\cdot\Delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\cdot\Delta z=\delta\left(\frac{\partial T}{\partial\phi}-\frac{\partial U}{\partial\phi}\right)+\delta\left(\frac{5a}{8}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial z}\right)=0\,,$$

aplicando Euler-Lagrange a las anteriores expresiones se llega a que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\phi}-\frac{\partial U}{\partial\dot\phi}\right)+\left(\frac{5a}{8}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot z}-\frac{\partial U}{\partial\dot z}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\phi}+\frac{5a}{8}\frac{\partial T}{\partial\dot z}\right)=0\Longrightarrow\frac{\partial T}{\partial\dot\phi}+\frac{5a}{8}\frac{\partial T}{\partial\dot z}=cte\Longrightarrow m^2\rho^2\dot\phi+\frac{5a}{8}p_z=cte\,.$$

---

13. Sea $\mathcal{L}'=\mathcal{L}+dF/dt$ con $F=F(\bar q)$, se mostrará que con $\mathcal{L}'$ se llega a las mismas ecuaciones de movimiento que con $\mathcal{L}$, es decir que dF/dt no aporta en las ecuaciones de movimiento. Para ello se parte de $\mathcal{L}'$, entonces

$$\mathcal{L}'=\mathcal{L}+\frac{dF}{dt}=\mathcal{L}+\sum_i\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}=\mathcal{L}+\sum_i\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot q_i\,,$$

dado que $\mathcal{L}'$ está escrito en coordenadas generalizada, es posible aplicar Euler-Lagrange como

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\mathcal{L}+\frac{dF}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\left(\mathcal{L}+\frac{dF}{dt}\right)\right)=\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\right)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{dF}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right)\right),$$

puede verificarse que, para F suficientemente bien definida, la parte de Euler-Lagrange aplicado a F es nula pues

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{dF}{dt}\right)=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot q_i\right)=\frac{\partial^2F}{\partial q_i^2}\dot q_i\,,\qquad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot q_i\right)\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial^2F}{\partial q_i^2}\dot q_i\,,$$

por lo que se verifica la igualdad entre las ecuaciones de movimientos resultantes de $\mathcal{L}$ y de $\mathcal{L}'$, es decir

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\mathcal{L}+\frac{dF}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\left(\mathcal{L}+\frac{dF}{dt}\right)\right)=\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\right)\right).$$

---

14. Considérese una Lagrangiano $\mathcal{L}(t,x,\dot x,y,\dot y)$ escrito en coordenadas no generalizadas x,y. Dado que no son generalizadas, x,y están vinculadas tal $f(x,y)=cte$. Si se plantea el principio de mínima acción queda

$$S=\int\mathcal{L}(t,x,\dot x,y,\dot y)dt\Longrightarrow\delta S=\int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x}\right)\right)\delta x dt+\int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot y}\right)\right)\delta y dt=0\,,$$

ahora bien, dado que x,y están vinculadas no se puede aplicar directamente Euler-Lagrange. Esto se debe a que si se supone δx libre, entonces δy completamente determinado y no se podrá aplicar Euler-Lagrange en y. Para resolver esto, se propone sumar un diferencial $\lambda(t)\delta f$, donde λ es el multiplicador de Lagrange, entonces

$$\lambda(t)\delta f = \lambda(t)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial x}\delta y\right) = 0\,,$$

dado que es nulo, se puede sumar a δS, redefiniendo el Lagrangiano $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})$ de forma que

$$S = \int \mathcal{L}(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \lambda)dt \Longrightarrow \delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x dt + \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y dt = 0\,,$$

en estas condiciones, usando coordenadas no generalizadas x, y, es posible resolver Euler-Lagrange como

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \lambda) \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) + \lambda(t)\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) + \lambda(t)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ f(x, y) = cte \end{cases}.$$

Para el caso de dos masas vinculadas por una soga, medidas desde la polea, el Lagrangiano $\mathcal{L}$ estará determinado por la energía cinética sumado a la energía potencial total, que ahora incluye también las fuerzas de vínculo, luego

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 - (-m_2 g y)\,, \qquad f(x, y) = x + y = cte\,,$$

aplicando Euler-Lagrange incluyendo los multiplicadores de Lagrange $\lambda(t)$ se tiene que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) + \lambda(t)\dfrac{\partial f}{\partial x} = -m_1\ddot{x} + \lambda(t) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) + \lambda(t)\dfrac{\partial f}{\partial y} = m_2 g - m_2\ddot{y} + \lambda(t) = 0 \\ f(x, y) = x + y = cte \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x} = \lambda(t) \\ m_2\ddot{y} = m_2 g + \lambda(t) \\ \ddot{x} = -\ddot{y} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\left(\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\right)g \\ \ddot{y} = \left(\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\right)g \\ \lambda = -\left(\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)g \end{cases},$$

por lo que, además de poderse resolver x, y, se obtiene el valor de λ. Puede comprobarse que el multiplicador de Lagrange λ, así como las ecuaciones antes planteadas, equivalen a plantear las ecuaciones de Newton, siendo λ exactamente igual a la fuerza de vínculo F_v (tensión soga). Es decir que

$$\begin{cases} F_x = F_v \\ F_y = F_p + F_v \\ x + y = cte \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x} = F_v \\ m_2\ddot{y} = m_2 g + F_v \\ \ddot{x} = -\ddot{y} \end{cases} \Longrightarrow \lambda \equiv F_v\,.$$

---

15. Se plantea el Lagrangiano $\mathcal{L}$ de un péndulo en coordenadas no generalizadas x, y como

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mg(l - x)\,,$$

sabiendo que el vínculo es $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = l = cte$, se plantea Euler-Lagrange con multiplicadores como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x} = mg - m\ddot{x} + \lambda(t)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = mg - m\ddot{x} + \lambda(t)\cos\theta = 0\,,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y} = -m\ddot{y} + \lambda(t)\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = -m\ddot{y} + \lambda(t)\sin\theta = 0\,,$$

lo que permite obtener las ecuaciones del movimiento, completamente equivalente a las de Newton, dadas por

$$\underbrace{m\ddot{x}}_{F_x} = \underbrace{mg}_{F_p} + \underbrace{\lambda(t)}_{F_v}\cos\theta\,, \qquad \underbrace{m\ddot{y}}_{F_y} = \underbrace{\lambda(t)}_{F_v}\sin\theta\,.$$

---

16. Se plantea el Lagrangiano sin considerar ningún tipo de vínculo, en especial no se considera a priori la condición de vínculo $r = R$. De esta forma, el Lagrangiano vendrá en coordenadas no generalizadas r, θ como

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \left(r \dot{\theta} \right)^2 - mgr \cos\theta \, ,$$

considerando la relación funcional del vínculo $f(r, \theta) = r = R = cte$, Euler-Lagrange con multiplicadores será

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial r} = \left(mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta \right) - m\ddot{r} + \lambda(t) = 0 \, ,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial \theta} = (mgr \sin\theta) - \left(2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} \right) = 0 \, ,$$

pueden obtenerse las ecuaciones de movimiento, totalmente equivalentes a las expresiones de Newton, como

$$\underbrace{m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)}_{F_r} = \underbrace{-mg\cos\theta}_{F_{p_r}} + \underbrace{\lambda(t)}_{F_v} \, , \qquad \underbrace{m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)}_{F_r} = \underbrace{mg\sin\theta}_{F_{p_\theta}} \, ,$$

donde $r = R$. Se busca luego el θ en que se separa de la superficie, partiendo de la segunda ecuación se tiene que

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta \Longrightarrow \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{g}{R}\int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta \, d\theta \Longrightarrow \dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{R}(\cos\theta_0 - \cos\theta) \, ,$$

de este modo, reemplazando en la ecuación radial del movimiento, se puede calcular el θ en que se separa de la superficie, es decir, cuando la fuerza de vínculo $\lambda = F_v = 0$. Esto resultará en que

$$\lambda = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2 = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0) = 0 \Longrightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}\cos\theta_0 \, .$$

---

17. Es posible definir como Lagrangiano $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ de un sistema mecánico $\bar{q}$ como aquel que verifica

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}}\right) ,$$

es decir que, propuesto un Lagrangiano $\mathcal{L}$, si éste verifica Euler-Lagrange, entonces es válido.

Para el caso electromagnético, se propone un Lagrangiano $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t)$ dado por

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2}\dot{\bar{r}}^2 - q(V - \dot{\bar{r}} \cdot \bar{A}) \, ,$$

resolviendo ambos términos de Euler-Lagrange y luego igualándolos se llega a la ecuación de movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{r}}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{\bar{r}} + q\bar{A}) = \frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + (\dot{\bar{r}} \cdot \nabla)\bar{A} \, ,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{r}} = -q\nabla V + q\nabla(\dot{\bar{r}} \cdot \bar{A}) = -q\nabla V + q\left(\dot{\bar{r}} \times \left(\underbrace{\bar{\nabla} \times \bar{A}}_{\bar{B}}\right) + (\dot{\bar{r}} \cdot \bar{\nabla})\bar{A}\right) = -q\nabla V + q\dot{\bar{r}} \times \bar{B} + (\dot{\bar{r}} \cdot \bar{\nabla})\bar{A} \, ,$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = q\left(\underbrace{-\nabla V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}}_{\bar{E}}\right) + q\bar{v} \times \bar{B} \Longrightarrow \bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) \, ,$$

de modo que el Lagrangiano propuesto verifica por completo la ecuación de movimiento resultante de considerar la fuerza de Lorentz, de modo que es válido $\mathcal{L}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t)$ para describir el sistema electromagnético $\bar{r}$.

(a) Se busca estudiar una partícula de carga q y masa m en presencia de un campo magnético uniforme $\bar{B} = B_0\hat{z}$. Se considerará que no hay presencia de campo eléctrico, luego $\bar{E} = 0$. En primer lugar, hay que relación los vectores $\bar{B}$ y $\bar{E}$ con los potenciales vector $\bar{A}$ y escalar V. Aplicando la definición de $\bar{A} = (A_x, A_y, A_z)$ se tiene que

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \Longrightarrow B_0\hat{z} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y}\right)\hat{z} \Longrightarrow \bar{A} = \frac{B_0}{2}(-y, x, 0) \,,$$

por otra parte, el potencial escalar V se relaciona con $\bar{E}$ y $\bar{A}$ de forma que:

$$\bar{E} = -\nabla V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \Longrightarrow \nabla V = -\bar{E} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = (0,0,0) \Longrightarrow V = V_0 = 0 \,.$$

Ahora considérese que el sistema se puede describir en coordenadas cilíndricas, luego la energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \left(\rho\dot{\phi}\right)^2 + \dot{z}^2\right),$$

por otra parte, con los resultados obtenidos de $\bar{A}$ y V se puede trabajar la energía potencial del sistema como

$$U = -q\dot{\bar{r}} \cdot \bar{A} = -q(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \cdot \frac{B_0}{2}(-y, x, 0) = \frac{1}{2}qB_0(y\dot{x} - x\dot{y}) \,,$$

$$U = \frac{1}{2}qB_0\left((\rho \sin\phi)\left(-\rho\dot{\phi}\sin\phi\right) - (\rho\cos\phi)\left(\rho\dot{\phi}\cos\phi\right)\right) = -\frac{1}{2}qB_0\rho^2\dot{\phi} \,,$$

de forma que el Lagrangiano resultante para el sistema quedará escrito como

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \left(\rho\dot{\phi}\right)^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{2}qB_0\rho^2\dot{\phi} \,.$$

(b) Las ecuaciones de movimiento del sistema se pueden encontrar aplicando Euler-Lagrange como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}}\right) = m\rho\dot{\phi}^2 - \frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) = m\rho\dot{\phi}^2 - m\ddot{\rho} = 0 \Longrightarrow \ddot{\rho} = \rho\dot{\phi}^2 \,,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = -\frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot{\phi} + \frac{1}{2}qB_0\rho^2\dot{\phi}\right) = 0 \Longrightarrow m\rho^2\dot{\phi} + \frac{1}{2}qB_0\rho^2 = cte \,,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) = -\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = 0 \Longrightarrow p_z = m\dot{z} = cte \,.$$

(c) La ecuación de movimiento en $\hat{\phi}$ verifica una conservación del momento angular en z dado por

$$L_z^{(o)} = L_{z_T}^{(o)} + L_{z_U}^{(o)} = m\rho^2\dot{\phi} + \frac{1}{2}qB\rho^2 = cte \,,$$

el cual está compuesto por una parte cinética y otra potencial. Tomando el caso en que el radio esté fijo $\rho = R$ y el campo magnético sea B. Suponiendo un estado tal que el campo inicial es B_0, la conservación de $L_z^{(o)}$ quedará

$$L_{z_i}^{(o)} = \frac{1}{2}qB_0R^2 = cte \,, \qquad L_z^{(o)} = mR^2\dot{\phi} + \frac{1}{2}qB\rho^2 = mRv_\phi + \frac{1}{2}qBR^2 = cte \,,$$

hallándose que, para variaciones en B, si inicialmente la partícula estaba quieta, ésta adquirirá una velocidad

$$v_\phi = -\frac{qR}{2m}(B - B_0) \,.$$

---

8. ¿Es válido “rehacer” el Lagrangiano una vez calculado el L_z conservado? ¿Por qué se cambia de signo el U_{eff} que debería quedar en el Lagrangiano y del mismo modo por qué se cambia el signo del ρ calculado con el Lagrangiano luego de haber reemplazado por L_z?

$$\mathcal{L}(t,\rho,\dot{\rho}) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{L_z}{m\sin\alpha}\right)^2\left(\frac{1}{\rho^2}\right) - mg\rho\cos\alpha\,,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} = -m\left(\frac{L_z}{m\sin\alpha}\right)^2\left(\frac{1}{\rho^3}\right) - mg\cos\alpha\,, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}}\right) = m\ddot{\rho}\,,$$

$$\ddot{\rho} + \left(\frac{L_z}{m\sin\alpha}\right)^2\left(\frac{1}{\rho^3}\right) + g\cos\alpha = 0\,.$$

$$\rho_0 = -\sqrt[3]{\frac{1}{g\cos\alpha}\left(\frac{L_z}{m\sin\alpha}\right)^2}\,, \qquad v_0 = \rho_0\dot{\phi}_0 = \pm\sqrt{-\rho_0 g\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}\,.$$

10. Revisar.

11. Revisar (d) y (e).

12. (a) Revisar que el Lagrangiano es válido como fue planteado. Pedir ayuda en vectorial, y la definición de derivada parcial o total de $\bar{A}$ (que cancela términos). (b) Consultar porqué $\bar{E} = 0$ y cómo se llegó al valor de $\bar{A}$.

* Avisar que el Lagrangiano en el 12 está mal escrito ¿?