

$$\bar{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i}, \quad \bar{r}_{cm} = \frac{\int \bar{r} dm}{\int dm}, \quad I_{jk} = \int (\delta_{ij} \sum x_\alpha^2 - x_i x_j) dm, \quad I_{ij} = \sum_\alpha \left( \delta_{ij} \left( \sum_\alpha x_\alpha^2 \right) - x_i x_j \right)$$

1. Ubicadas cinco bolitas de igual masa en una pirámide de base cuadrada  $L$  y la restante en su vértice  $H$  se tiene

$$\bar{r}_{cm} = \frac{(mL\hat{x}) + (-mL\hat{x}) + (mL\hat{y}) + (-mL\hat{y}) + (mH\hat{z})}{m + m + m + m + m} = \frac{1}{5}H\hat{z}.$$

2. Considerando el alambre está siempre en un plano  $z = 0$ , se considerará que  $z_{cm} = 0$ . Por simetría, se puede verificar que  $y_{cm} = 0$ , luego el centro de masa del alambre sólo estará desplazado en  $x$  de forma que

$$x_{cm} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_{-\theta}^{\theta} (R \cos \theta' - R) R d\theta'}{\int_{-\theta}^{\theta} R d\theta'} = R \left( \frac{\sin \theta}{\theta} - 1 \right) = R \left( \left( \frac{2R}{L} \right) \sin \left( \frac{L}{2R} \right) - 1 \right),$$

donde se consideró que  $L = 2\theta R$ . Para los límites en que  $R \rightarrow \infty$  o  $L = 2\pi R$  se obtiene que

$$x_{cm}(R \rightarrow \infty) = 0, \quad x_{cm}(\theta = \pi) = -R,$$

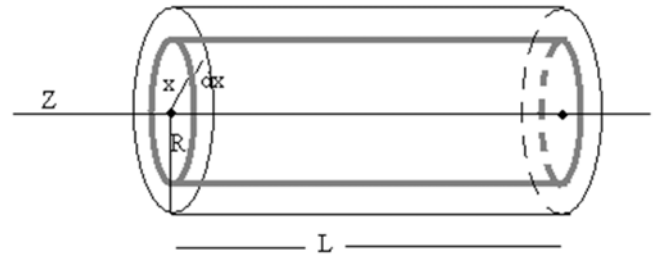
los cuales corresponden a una caso de alambre sin doblar y una circunferencia completa, respectivamente.

3. Se sabe que el momento de inercia respecto a un eje  $z$  vendrá dado como

$$I \equiv I_{zz} = \int r^2 dm,$$

si se considera que un cilindro está formado por capas cilíndricas de altura  $h$ , el diferencial de masa será

$$dm = \int_0^H \int_0^{2\pi} \rho r d\theta dz dr = 2\pi \rho H r dr,$$



por otra parte, la densidad puede ser reescrita en términos de la masa total integrando en todo su volumen, luego

$$\rho = M/\pi R^2 H,$$

de forma que, integrando en el radio  $R$ , el momento de inercia del cilindro respecto de su altura (eje  $z$ ) será

$$I \equiv I_{zz} = \int r^2 dm = 2\pi \rho H \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho H \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} (\pi R^2 H \cdot \rho) R^2 = \frac{1}{2} M R^2.$$

Este resultado es totalmente equivalente a haber planteado la fórmula general en forma explícita, es decir que

$$I_{zz} = \int (\delta_{zz}(x^2 + y^2 + z^2) - z \cdot z) dm = \int r^2 dm = \int_0^H \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho r^3 dr = \frac{R^4}{4} 2\pi H \rho = \frac{1}{2} M R^2,$$

por simetría, los productos de inercia resultan nulos en tal eje, puede verificarse calculando explícitamente como

$$I_{xz} = I_{zy} = - \int x z dm = - \int_0^H \int_0^R \int_0^{2\pi} r \cos \theta z \rho r d\theta dr dz = \dots = 0,$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \int xz dm = - \int_0^H \int_0^R \int_0^{2\pi} r \sin \theta z \rho r d\theta dr dz = \dots = 0.$$

4. Para el momento de inercia de una esfera sólida, a lo largo de un eje que pasa por su centro, se tomarán las distintas capas circulares, perpendiculares al eje, de forma que se pueda escribir un diferencial de masa como

$$dm = dz \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho r d\theta dr = \rho \pi r^2 dz,$$

donde se resalta que  $r \equiv r(z)$ . Luego, la densidad de masa se puede reescribir en términos de la masa total como

$$M = \int dm = \int \rho dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{4\pi\rho}{3} R^3 \Rightarrow \rho = \frac{3M}{4\pi R^3},$$

de este modo, se puede considerar el diferencial del momento de inercia en términos de pilas de cilindros como

$$dI = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{3Mr^4}{8\pi R^3}.$$

Por otra parte, considerando que  $r(z)$  se relaciona con la altura  $z$  por  $R^2 = r^2 + z^2$ , e integrando luego entre las alturas máxima y mínima de  $z$  (coincidentes con  $\pm R$  para la esfera), se obtiene el momento de inercia como

$$I \equiv I_{zz} = \int r^2 dm = \rho \pi \int_{-R}^R r^4 dz = \frac{3M}{4R^3} \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz = \dots = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 = \frac{2}{5} MR^2.$$

En caso de que se tuviera una corona esférica de radios interno  $a$  y externo  $b$ , la densidad de masa cumplirá

$$M = M_{\text{sólido}} - M_{\text{hueco}} = \frac{4\pi\rho}{3} b^3 - \frac{4\pi\rho}{3} a^3 = \frac{4\pi\rho}{3} (b^3 - a^3) \Rightarrow \rho = \frac{3M}{4\pi(b^3 - a^3)},$$

por otra parte, los momentos de inercia son aditivos de igual forma, por lo que el momento de inercia total será

$$I = I_{\text{sólido}} - I_{\text{hueco}} = \frac{8\pi}{15} \rho b^5 - \frac{8\pi}{15} \rho a^5 = \frac{2}{5} M \frac{b^5 - a^5}{b^3 - a^3}.$$

Alternativamente, se puede aplicar en forma explícita la expresión para el cálculo del tensor de inercia, luego

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int (x^2 + y^2 + z^2 - z \cdot z) \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b (r^2 - z^2) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \dots \\ I_{zz} &= 2\pi\rho \int_0^\pi \int_a^b (r^2 - r^2 \cos^2 \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta = 2\pi\rho \int_0^\pi \int_a^b r^4 \sin^3 \theta dr d\theta = \frac{2\pi}{5} \rho (b^5 - a^5) \int_a^\pi \sin^3 \theta d\theta = \dots \\ I_{zz} &= \frac{2\pi}{5} \rho (b^5 - a^5) \left[ \frac{1}{12} (\cos 3\theta - 9 \cos \theta) \right]_0^\pi = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 = \frac{2}{5} MR^2. \end{aligned}$$

5. Para el sistema propuesto de masas 1,2, las distancias en coordenadas cartesianas vendrán dadas como

$$\bar{r} \equiv \bar{r}_1 = \left( 0, \frac{l}{2} \sin \alpha, \frac{l}{2} \cos \alpha \right), \quad \bar{r}_2 = -\bar{r} = \left( 0, -\frac{l}{2} \sin \alpha, -\frac{l}{2} \cos \alpha \right),$$

considerando el sistema de dos masas puntuales pedido, los momentos y productos de inercia serán

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= M \left( (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - x_1^2 \right) + M \left( (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - x_2^2 \right) = 2M(y^2 + z^2) = \frac{Ml^2}{2}, \\
I_{yy} &= M \left( (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - y_1^2 \right) + M \left( (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - y_2^2 \right) = 2M(x^2 + z^2) = \frac{Ml^2}{2} \cos^2 \alpha, \\
I_{zz} &= M \left( (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - z_1^2 \right) + M \left( (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - z_2^2 \right) = 2M(x^2 + y^2) = \frac{Ml^2}{2} \sin^2 \alpha, \\
I_{xy} &= I_{yx} = M(-xy) + M(-(-x)(-y)) = 0, \\
I_{xz} &= I_{zx} = M(-xz) + M(-(-x)(-z)) = 0, \\
I_{yz} &= I_{zy} = M(-yz) + M(-(-y)(-z)) = -2Myz = -\frac{Ml^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha.
\end{aligned}$$

de este modo, el tensor de inercia y la velocidad angular quedará descriptas como

$$\bar{I} = \frac{Ml^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & -\sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix},$$

lo que permite, usando trivialmente que  $\hat{y} \equiv \hat{r}$ , calcular el momento angular desde o

$$\bar{L}_o = \bar{I} \cdot \bar{\omega} = \frac{M\omega l^2}{2} (\sin^2 \alpha \hat{z} - \sin \alpha \cos \alpha \hat{r}),$$

el cual resulta coincidente al hallado anterior para el otro sistema en que los ejes eran rotados.

**6.** Consideremos un cuerpo rígido compuesto por tres masas puntuales  $M_1 = M, M_2 = 2M, M_3 = 3M$ , tales que

$$\bar{r}_1 = (a, 0, 0), \quad \bar{r}_2 = (0, a, a), \quad \bar{r}_3 = (0, a, -a).$$

Los momentos y productos de inercia en los ejes cartesianos  $x, y, z$  vendrán dados como

$$I_{xx} = 10Ma^2, \quad I_{yy} = I_{zz} = 6Ma^2, \quad I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = Ma^2,$$

de forma que el tensor de inercia en tales ejes fijos al cuerpo rígido será

$$\bar{I} = Ma^2 \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Los momentos principales de inercia del cuerpo rígido se recuperan a partir de calcular los autovalores  $\lambda$  como

$$\det(\bar{I} - \lambda \cdot Id) = \begin{vmatrix} 10Ma^2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6Ma^2 - \lambda & Ma^2 \\ 0 & Ma^2 & 6Ma^2 - \lambda \end{vmatrix} = (10Ma^2 - \lambda)((6Ma^2 - \lambda)^2 - (Ma^2)^2) = \dots = 0,$$

de forma que los momentos principales de inercia serán los autovalores encontrados, siendo estos

$$\lambda_1 = 10Ma^2, \quad \lambda_2 = 7Ma^2, \quad \lambda_3 = 5Ma^2,$$

además, cada autovalor tiene un autovector asociado, que se calcula a partir de

$$\bar{I} - \lambda_1 \cdot Id = Ma^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \bar{I} - \lambda_2 \cdot Id = Ma^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{I} - \lambda_3 \cdot Id = Ma^2 \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

por último, obteniendo la solución independiente correspondiente a cada caso, se obtiene que

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \bar{e}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \bar{e}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right),$$

lo que forma un conjunto ortonormal  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  en los ejes principales de inercia del cuerpo rígido.

7. Es conveniente definir cómo viene dado el diferencial de masa y sus límites de integración, de esta forma

$$M = \int dm = \int_0^a \int_0^{a-x} \sigma dx dy = \int_0^a \sigma(a-x) dx = \frac{\sigma a^2}{2} = \frac{\sigma A}{2},$$

donde  $a = 1$  corresponde a los catetos del triángulo. De esta forma, los momentos y productos de inercia serán

$$I_{xx} = \int y^2 dm = \int_0^a \int_0^{a-x} \sigma y^2 dx dy = \int_0^a \sigma(a-x)^3 dx = \frac{\sigma}{12} [-(a-x)^4]_0^a = \frac{\sigma a^4}{12} = \frac{\sigma A^2}{12},$$

$$I_{yy} = \int x^2 dm = \int_0^a \int_0^{a-x} \sigma x^2 dx dy = \int_0^a \sigma x^2(a-x) dx = \frac{\sigma}{12} \left[ \left( \frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \right]_0^a = \frac{\sigma a^4}{12} = \frac{\sigma A^2}{12},$$

$$I_{zz} = \int x^2 + y^2 dm = \int y^2 dm + \int x^2 dm = I_{xx} + I_{yy},$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \int -xy dm = \int_0^a \int_0^{a-x} -\sigma xy dx dy = \int_0^a -\frac{\sigma x}{2} (a-x)^2 dx = \dots = -\frac{\sigma a^4}{24} = -\frac{\sigma A^2}{24},$$

$$I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0,$$

siendo muchas de estas relaciones también evidentes por la simetría del problema. Luego, el tensor de inercia es

$$\bar{I} = \frac{\sigma A^2}{24} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

donde se puede definir, en función de datos iniciales, que  $I_0 \equiv \sigma A^2/24$ , siendo  $I_0 = 1$  para el caso particular pedido del problema. Para el cálculo de los momentos principales, resta calcular los autovalores como

$$\det(\bar{I} - \lambda \cdot Id) = \begin{vmatrix} 2I_0 - \lambda & -I_0 & 0 \\ -I_0 & 2I_0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4I_0 - \lambda \end{vmatrix} = (4I_0 - \lambda)((2I_0 - \lambda)^2 - I_0^2) = (4I_0 - \lambda)(3I_0 - \lambda)(I_0 - \lambda) = 0,$$

obteniéndose los momentos principales de inercia del cuerpo rígido como

$$\lambda_1 = I_0 = \frac{\sigma A^2}{24}, \quad \lambda_2 = 3I_0 = \frac{\sigma A^2}{8}, \quad \lambda_3 = 4I_0 = \frac{\sigma A^2}{6},$$

dichos momentos tienen asociada una base de ejes principales, para ello se calcula

$$\bar{I} - \lambda_1 \cdot Id = I_0 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{I} - \lambda_2 \cdot Id = I_0 \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{I} - \lambda_3 \cdot Id = I_0 \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de forma que el conjunto ortonormal de ejes vendrá dado por las soluciones, siendo éstas normalizadas como

$$\bar{e}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \bar{e}_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \bar{e}_3 = (0, 0, 1).$$

8. Los momentos principales de inercia de un cuerpo rígido satisfacen  $\lambda_3 \leq \lambda_1 + \lambda_2$ , ello se prueba como

$$I_{11} = \lambda_1 = \int (x_2^2 + x_3^2) dm, \quad I_{22} = \lambda_2 = \int (x_1^2 + x_3^2) dm, \quad I_{33} = \lambda_3 = \int (x_1^2 + x_2^2) dm,$$

$$\lambda_3 = \int (x_1^2 + x_2^2) dm \leq \int (x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) dm = \lambda_1 + \lambda_2,$$

además, en particular si  $x_3 \equiv 0$ , se cumple la igualdad. La misma proposición es equivalente para probar dicha desigualdad intercambiando coordenadas.

9. Supóngase conocido el momento de inercia  $\bar{I}$  del trompo en los ejes principales de inercia, en cuyo caso éste forma una base  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  en dichos ejes. Además, se considerará simétrico por revolución, luego  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

De este modo, para la velocidad angular en dichos ejes, se consideran los ángulos de Euler  $\phi, \theta, \psi$  de forma que

$$\bar{\omega} = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{x}' + \dot{\psi}\hat{z}'',$$

lo que implica rotaciones sucesivas tales que: se rota  $\phi$  entorno a  $\hat{z}$  produciendo  $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$  ( $\hat{z}' = \hat{z}$ ); luego se rota  $\theta$  entorno al nuevo  $\hat{x}'$  produciendo  $\hat{x}'', \hat{y}'', \hat{z}''$  ( $\hat{x}'' = \hat{x}'$ ); y, por último, se rota  $\psi$  entorno al nuevo  $\hat{z}''$  produciendo la base final  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  ( $\hat{e}_3 = \hat{x}''$ ), la cual corresponderá con la de los ejes principales de inercia. Para el caso particular del trompo, se considera por simetría que  $\psi = 0$ , de forma tal que es posible reescribir la base  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  en términos de  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  como

$$\hat{z} = \hat{z}' = (\cos \theta \hat{e}_3 + \sin \theta \hat{e}_2), \quad \hat{x}' = \hat{x}'' = \hat{e}_1, \quad \hat{z}'' = \hat{e}_3,$$

lo cual se reflejará en la velocidad angular como

$$\bar{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3 = \dot{\theta} \hat{e}_1 + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{e}_3.$$

Por otro lado, la energía cinética rotacional en los ejes principales de inercia, medida desde un punto fijo, será

$$T = \frac{1}{2} (\bar{\Omega} \cdot \bar{I} \cdot \bar{\Omega}) = \frac{1}{2} (\lambda_1 \omega_1^2 + \lambda_2 \omega_2^2 + \lambda_3 \omega_3^2),$$

usando la velocidad angular  $\bar{\omega}$  calculada, la simetría  $\lambda_1 = \lambda_2$  y la energía potencial del centro de masa, se llega a

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{\lambda_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - MgR \cos \theta.$$

Para este Lagrangiano, escrito en coordenadas generalizadas, las ecuaciones de Euler-Lagrange dan

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \lambda_1 \ddot{\theta} - (\lambda_1 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - \lambda_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\phi} \sin \theta + MgR \sin \theta) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} (\lambda_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + \lambda_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{d}{dt} (\lambda_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)) = 0,$$

de lo cual puede verificarse que las últimas dos ecuaciones producen las magnitudes conservadas

$$L_z = \lambda_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + \lambda_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta = cte,$$

$$L_3 = \lambda_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = cte,$$

verificándose, en particular, que si  $\theta = 0$ , entonces  $L_z = L_3 = cte$  para todo tiempo. Esto puede observarse construyendo el potencial efectivo a partir de la ecuación de movimiento en  $\theta$ . Reemplazando  $L_3$  en  $L_z$  se obtiene

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{\lambda_1 \sin^2 \theta},$$

del mismo modo, usando este resultado en la ecuación de  $L_3$  se obtiene que

$$\dot{\psi} = \frac{L_3}{\lambda_3} - \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{\lambda_1 \sin^2 \theta} \cos \theta,$$

por último, usando los resultados de  $\dot{\phi}$  y  $L_3$ , la ecuación de movimiento en  $\theta$  quedará escrita como

$$\ddot{\theta} = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{\lambda_1^2 \sin^3 \theta} \cos \theta - \frac{L_3 L_z - L_3 \cos \theta}{\lambda_1^2 \sin \theta} + \frac{MgR}{\lambda_1} \sin \theta .$$

Dado que no hay dependencia temporal en el Lagrangiano, se puede escribir la energía total del sistema como

$$E = T + U = \frac{\lambda_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{\lambda_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + MgR \cos \theta ,$$

la cual, usando resultados anteriores, se puede reescribir en términos de  $\theta$  como

$$E = \frac{\lambda_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2\lambda_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2\lambda_3} + mgR \cos \theta = T_{eff} + U_{eff} ,$$

$$\frac{dE}{dt} = \lambda_1 \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{L_3(L_z - L_3 \cos \theta) \dot{\theta}}{\lambda_1 \sin \theta} - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2 \dot{\theta} \cos \theta}{\lambda_1 \sin^3 \theta} - mgR \dot{\theta} \sin \theta = 0 ,$$

usando que para  $\theta \approx 0$  se cumple que  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$ ,  $\theta^3 \ll \theta$ , se lo que se llega a una expresión

$$\frac{(L_z - L_3)^2}{\theta^3} = 0 ,$$

de lo que se verifica que  $L_z = L_3$  entorno a  $\theta = 0$  de forma tal que la energía se conserve. Esto mismo también se verifica a partir de la conservación de  $L_z$  y  $L_3$  antes estudiada, tomando  $\theta \approx 0$ .

Usando que  $L_3 = L_z$  en  $\theta = 0$  y haciendo un desarrollo en segundo orden del potencial efectivo en dicho punto

$$U_{eff} = \frac{L_3^2}{2\lambda_1} \tan^2(\theta/2) + \frac{L_3^2}{2\lambda_3} + MgR \cos \theta ,$$

$$\frac{dU_{eff}}{d\theta} = \frac{L_3^2}{2\lambda_1} \frac{\tan(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} - MgR \sin \theta ,$$

$$\frac{d^2 U_{eff}}{d\theta^2} = \frac{L_3^2}{4\lambda_1} \frac{1}{\cos^4(\theta/2)} - \frac{L_3^2}{2\lambda_1} \frac{\tan^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} - MgR \cos \theta ,$$

$$U_{eff} \approx \frac{L_3^2}{2\lambda_3} + MgR + \left( \frac{L_3^2}{4\lambda_1} - MgR \right) \frac{\theta^2}{2} , \quad \left. \frac{d^2 U_{eff}}{d\theta^2} \right|_0 = \frac{L_3^2}{4\lambda_1} - MgR = \frac{\lambda_3^2}{4\lambda_1} (\omega_3^2 - \omega_{min}^2) ,$$

de lo cual es posible verificar, a partir de la derivada segunda, la estabilidad o no del sistema como

$$\omega_{min} = 2 \sqrt{MgR \lambda_1 / \lambda_3^2} , \quad \omega_3 > \omega_{min} \text{ (estable)} , \quad \omega_3 < \omega_{min} \text{ (inestable)} .$$

**10.** El problema se dividirá en el análisis de dos cuerpos: una placa que rota, cuerpo (1), y otra placa adyacente, cuerpo (2), que además varía en ángulo  $\theta$  respecto del plano. Si se elige como sistema inercial el centro de masa  $CM_1$  del cuerpo (1), el Lagrangiano del sistema total quedará escrito como

$$\mathcal{L} = T_{rot}^{(1)} + T_{rot}^{(2)} + T_{CM_2}^{(2)} - (U_1 + U_2) .$$

Con el objetivo de calcular la energía cinética rotacional, se procede a calcular los momentos principales de inercia en la base  $\hat{e}_1^1, \hat{e}_2^1, \hat{e}_3^1$  de los cuerpos (1) y (2), los cuales equivalentes, pensando que ambos cuerpos tienen la misma dimensión  $a \times b$  y masa  $M$ . Dado que son planos, el diferencial de masa se escribirá como

$$dm = \rho \delta(x_3) dx_3 dx_1 dx_2 = \sigma \delta(x_3) dx_3 dx_1 dx_2 ,$$

donde  $\delta$  corresponde a la delta de Kronecker la cual verifica, por ejemplo, para una variable  $t$ , que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) f(t) dt = f(a) ,$$

lo cual permite calcular la masa total de cada una de las placas como

$$M = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \delta(x_3) dx_3 dx_1 dx_2 = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma dx_1 dx_2 = \sigma ab .$$

Por simetría, los productos de inercia se cancelan, mientras que los momentos principales quedarán

$$I_{11} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-\infty}^{\infty} (x_2^2 + x_3^2) \rho \delta(x_3) dx_3 dx_1 dx_2 = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} x_2^2 \sigma dx_1 dx_2 = \frac{\sigma ab}{12} a^2 = \frac{M}{12} a^2 ,$$

$$I_{22} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1^2 + x_3^2) \rho \delta(x_3) dx_3 dx_1 dx_2 = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} x_1^2 \sigma dx_1 dx_2 = \frac{\sigma ab}{12} b^2 = \frac{M}{12} b^2 ,$$

$$I_{33} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1^2 + x_2^2) \rho \delta(x_3) dx_3 dx_1 dx_2 = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} (x_1^2 + x_2^2) \sigma dx_1 dx_2 = \frac{\sigma ab}{12} (a^2 + b^2) = \frac{M}{12} (a^2 + b^2) ,$$

de lo cual se obtienen los momentos principales de inercia, en su correspondiente tensor, como

$$\bar{I} = \bar{\lambda} \cdot Id = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} .$$

Si bien los tensores de inercia son equivalentes para ambos cuerpos, no lo son sus ángulos de Euler, por lo cual resta calcularlos. Para el caso del cuerpo (1), sólo existe rotación en  $\phi$ , la cual corresponde al eje  $z$  fijo; luego

$$\bar{\Omega}_1 = \dot{\phi} \hat{z}_1 + \dot{\theta} \hat{x}'_1 + \dot{\psi} \hat{z}''_1 = \dot{\phi} \hat{e}_3^{(1)} + \dot{\theta} \hat{e}_1^{(1)} + \dot{\psi} \hat{e}_3^{(1)} = \Omega \hat{e}_3^{(1)} ,$$

para lo cual se usaron las condiciones  $\theta \equiv \phi \equiv 0$ ,  $\dot{\phi} = \Omega = \text{cte}$ ,  $\phi = \Omega t$ ; mientras que  $\hat{e}_1^1, \hat{e}_2^1, \hat{e}_3^1$  corresponden a la base de los momentos principales de inercia de (1). Por otra parte, para el cuerpo (2) existe rotación en  $\phi$  y en  $\theta$ , mientras que  $\dot{\psi} \equiv 0$ ,  $\dot{\phi} = \Omega$ , por lo que los ángulos de Euler en los momentos principales de inercia de (2) son

$$\bar{\Omega}_2 = \dot{\phi} \hat{z}_2 + \dot{\theta} \hat{x}'_2 + \dot{\psi} \hat{z}''_2 = \dot{\phi} (\cos \theta \hat{e}_3^{(2)} + \sin \theta \hat{e}_2^{(2)}) + \dot{\theta} \hat{e}_1^{(2)} + \dot{\psi} \hat{e}_3^{(2)} = \dot{\theta} \hat{e}_1^{(2)} + \Omega \sin \theta \hat{e}_2^{(2)} + \Omega \cos \theta \hat{e}_3^{(2)} ,$$

luego, la energía cinética rotacional, en los momentos principales de inercia, quedará para cada cuerpo como

$$T_{rot}^{(1)} = \frac{M}{24} (a^2 + b^2) \Omega^2 , \quad T_{rot}^{(2)} = \frac{M}{24} (a^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \cos^2 \theta) + b^2 \Omega^2) .$$

Resta calcular la energía cinética del centro de masa del cuerpo (2), entonces

$$\bar{r}_{cm}^{(2)} = \frac{a}{2} ((1 + \cos \theta) \hat{\phi} + \sin \theta \hat{z}) , \quad \bar{v}_{cm}^{(2)} = \frac{a}{2} (\dot{\theta} (-\sin \theta) \hat{\phi} - \Omega (1 + \cos \theta) \hat{\rho} + \dot{\theta} \cos \theta \hat{z}) ,$$

$$T_{CM_2}^{(2)} = \frac{M}{2} \bar{v}_{cm}^{(2)} \cdot \bar{v}_{cm}^{(2)} = \frac{Ma^2}{8} (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 (1 + \cos \theta)^2) .$$

Juntando los resultados anteriores, la energía cinética total del sistema vendrá dada por

$$T = \frac{Ma^2}{12} (2\dot{\theta}^2 + 2\Omega^2 \cos^2 \theta + 3\Omega^2 \cos \theta) + \frac{M}{12} (2a^2 + b^2) \Omega^2 .$$

El Lagrangiano, en presencia de un potencial gravitatorio que sólo interactúa con la placa (2), será

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - U(\theta) = \frac{Ma^2}{12} (2\dot{\theta}^2 + 2\Omega^2 \cos^2 \theta + 3\Omega^2 \cos \theta) - \left\{ \frac{Mga}{2} \sin \theta \right\} ,$$

aplicando Euler-Lagrange en la única coordenada  $\theta$  se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{Ma^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{Ma^2 \Omega^2}{12} (4 \cos \theta \sin \theta + 3 \sin \theta) + \left\{ \frac{Mga}{2} \cos \theta \right\} = 0 ,$$

de lo que se obtiene las ecuaciones de movimiento en  $\theta$  como

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \left( \cos \theta \sin \theta + \frac{3}{4} \sin \theta \right) + \omega_0^2 \cos \theta = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{3g}{2a}.$$

Para el caso particular en que  $\Omega \equiv 0$  se recuperan las condiciones de un péndulo físico, es decir

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \cos \theta = 0,$$

siendo  $\theta_e = \pm\pi/2$  los puntos de equilibrio del sistema. Para pequeñas oscilaciones en dichos puntos, se tiene que  $\cos \theta \approx \theta$ , lo cual resulta en una solución armónica de frecuencia  $\omega_0$ , verificándose equilibrios estables.

Por otra parte, si no hay campo gravitatorio, entonces  $\omega_0 \equiv 0$ , por lo que las ecuaciones de movimiento serán

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \sin \theta \left( \cos \theta + \frac{3}{4} \right) = 0,$$

de forma tal que, estando el sistema en equilibrio en  $\ddot{\theta} = 0$ , se hallarán equilibrios en  $\theta_e = 0, \pi, \theta_{1,2}$ ; donde los puntos  $\theta_{1,2}$  son las soluciones de  $\theta_{1,2} = \pm \arccos(-3/4)$ . Se verificará la estabilidad para los distintos  $\theta_e$  como

$$(\theta \approx 0) \Rightarrow \ddot{\theta} + \left( \frac{7}{4} \Omega^2 \right) \theta = 0 \quad (\text{solución estable oscilador armónico frecuencia } \sqrt{7}\Omega/2),$$

$$(\theta \approx \pi) \Rightarrow \ddot{\theta} - \left( \frac{1}{4} \Omega^2 \right) \theta = 0 \quad (\text{solución inestable exponencial}),$$

para las restantes soluciones se puede verificar que  $\sin(\theta_{1,2}) = \pm\sqrt{7}/4$ , de forma tal que

$$(\theta \approx \theta_1) \Rightarrow \ddot{\theta} + \left( \frac{\sqrt{7}}{4} \Omega^2 \right) \theta = 0 \quad (\text{solución estable oscilador armónico frecuencia } \sqrt[4]{7}\Omega/2),$$

$$(\theta \approx \pi) \Rightarrow \ddot{\theta} - \left( \frac{\sqrt{7}}{4} \Omega^2 \right) \theta = 0 \quad (\text{solución inestable exponencial}).$$

Para el caso general es posible analizar el Lagrangiano en término de un potencial efectivo, para ello

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T_{ef}(\theta, \dot{\theta}) - U_{ef}(\theta) = \frac{Ma^2}{6} \dot{\theta}^2 - \frac{Ma^2}{12} \Omega^2 \left( \frac{6g}{a\Omega^2} \sin \theta - 2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta \right),$$

$$U_{ef} \equiv A \cdot (\lambda \sin \theta - 2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta), \quad A \equiv \frac{Ma^2}{12} \Omega^2 > 0, \quad \lambda \equiv \frac{6g}{a\Omega^2} > 0,$$

de lo que se puede estudiar el potencial efectivo. En particular, si  $\lambda \rightarrow 0$  se tiene que

$$U_{ef} \approx -A \cos \theta (2 \cos \theta + 3),$$

con puntos de equilibrio en  $\theta = \pm\pi/2$  y en  $\theta = \pm \arccos(3/2)$ , pudiéndose estudiar en la derivada la estabilidad. Del mismo modo, si  $\lambda \rightarrow \infty$ , el potencial cobra la forma

$$U_{ef} \approx A\lambda \sin \theta,$$

del cual se obtiene equilibrios en  $\theta = 0$  (estable) y  $\theta = \pi$  (inestable).

**11.** Las ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido vienen dadas en su forma general como

$$\bar{\mathbf{I}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Omega}} + \bar{\boldsymbol{\Omega}} \times (\bar{\mathbf{I}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Omega}}) = \bar{\boldsymbol{\tau}},$$

donde se usan los momentos principales de inercia en la descripción. Esto resulta en tres ecuaciones

$$\lambda_1 \dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_2) \omega_2 \omega_3 = \tau_1, \quad \lambda_2 \dot{\omega}_2 + (\lambda_1 - \lambda_3) \omega_3 \omega_1 = \tau_2, \quad \lambda_3 \dot{\omega}_3 + (\lambda_2 - \lambda_1) \omega_1 \omega_2 = \tau_3.$$



Se busca estudiar qué ocurre cuando hay rotaciones constantes respecto de cada eje principal de inercia y luego éstas resultan perturbadas en las restantes componentes ortogonales. Considérese que  $\bar{\tau} = 0$ , pues el campo gravitatorio actúa uniformemente en todo el cuerpo y, por tanto, no hay torques efectivos; además,  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  y que es posible definir una base  $(i, j, k)$ , donde ésta alterna entre los casos  $(1,2,3)$ ,  $(3,2,1)$ ,  $(2,3,1)$ . Supóngase ahora una velocidad angular constante  $\omega_i \hat{e}_i$  la cual es perturbada ortogonalmente en  $\epsilon_j \hat{e}_j$  y en  $\epsilon_k \hat{e}_k$ , luego

$$\bar{\omega} = \omega_i \hat{e}_i + \epsilon_j \hat{e}_j + \epsilon_k \hat{e}_k ,$$

usando estos resultados en las ecuaciones de Euler se obtienen ecuaciones equivalentes en  $(i, j, k)$  como

$$\lambda_i \dot{\omega}_i + (\lambda_k - \lambda_j) \epsilon_j \epsilon_k = 0 , \quad \lambda_j \dot{\epsilon}_j + (\lambda_i - \lambda_k) \epsilon_k \omega_i = 0 , \quad \lambda_k \dot{\epsilon}_k + (\lambda_j - \lambda_i) \omega_i \epsilon_j = 0 .$$

De la primera ecuación, dado que  $\epsilon_j \epsilon_k \approx 0$ , se deduce que  $\dot{\omega}_i = 0$  y, por tanto, se tiene una rotación con velocidad angular  $\omega_i = cte$  en dicho eje  $i$ . Las restantes ecuaciones se encuentran acopladas, de forma tal que

$$\dot{\epsilon}_j + \frac{\lambda_i - \lambda_k}{\lambda_j} \epsilon_k \omega_i = 0 , \quad \dot{\epsilon}_k + \frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_k} \omega_i \epsilon_j = 0 ,$$

las cuales se pueden desacoplar a segundo orden, derivando cada una y reemplazando, obteniéndose que

$$\ddot{\epsilon}_j + \Lambda^2 \epsilon_j = 0 , \quad \ddot{\epsilon}_k + \Lambda^2 \epsilon_k = 0 , \quad \Lambda^2 = \left( \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right) - 1 \right) \left( \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \right) - 1 \right) \omega_i^2 .$$

Para  $(i, j, k) = (1, 2, 3)$  se tiene que la rotación principal es en  $\omega_1$  y se obtiene, recordando que  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ , un valor de  $\Lambda_1^2 > 0$ , en cuyo caso las perturbaciones en los restantes ejes resultan estables pues resulta en las ecuaciones de un oscilador armónico con frecuencia  $\Lambda_1$ ; del mismo modo, para  $(i, j, k) = (3, 1, 2)$  se tiene que la rotación principal es en  $\omega_3$  y se obtiene  $\Lambda_3^2 > 0$ , por lo que las perturbaciones resultan también estables.

Por último, para  $(i, j, k) = (2, 3, 1)$ , que corresponde a la rotación  $\omega_2$  en el eje con momento de inercia intermedio, se obtiene que  $\Lambda_2^2 < 0$ , en cuyo caso las perturbaciones producen un comportamiento exponencial puro, lo que implica un equilibrio inestable. Puede, por otra parte, verificarse que si  $\lambda_1 = \lambda_2$ , entonces para  $i = 1, 2$  se obtiene  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ ; en cuyo caso las soluciones  $\epsilon_{jk}$  resulta lineales en el tiempo y, por tanto, inestables, sólo verificándose estabilidad para el caso  $i = 3$ , en el cual  $\Lambda_3^2 > 0$ .

**12.** Se tiene un cilindro con nutación en  $\theta$  el cual tiene una rotación  $\Omega$  constante entorno a un eje fijo. Primeramente, hay que calcular la densidad de masa y los momentos de inercia del cilindro, de lo que se obtiene

$$I_{11} = \int (x_2^2 + x_3^2) dm = \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (r^2 \sin^2 \theta + z^2) \rho r dr d\phi dz = \frac{\rho \pi a^2 l}{12} (3a^2 + l^2) = \frac{m}{12} (3a^2 + l^2) ,$$

$$I_{22} = \int (x_1^2 + x_3^2) dm = \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (r^2 \cos^2 \theta + z^2) \rho r dr d\phi dz = \frac{\rho \pi a^2 l}{12} (3a^2 + l^2) = \frac{m}{12} (3a^2 + l^2) ,$$

$$I_{33} = \int (x_1^2 + x_2^2) dm = \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \rho r dr d\phi dz = \frac{1}{2} \rho \pi a^4 l = \frac{ma^2}{2} ,$$

lo que resulta, dado que los productos de inercia son nulos, en momentos principales de inercia

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{m}{12} (3a^2 + l^2) , \quad \lambda_3 = \frac{ma^2}{2} .$$

Lo siguiente es describir el movimiento en términos de los ejes principales de inercia. Para ello se considerará que la velocidad angular en los ejes principales de inercia se puede describir como

$$\bar{\omega} = \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{x}' + \dot{\psi} \hat{z}'' = \dot{\phi} (\cos \theta \hat{e}_3 + \sin \theta \hat{e}_2) + \dot{\theta} \hat{e}_1 = \dot{\theta} \hat{e}_1 + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_2 + \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_3 ,$$

con  $\dot{\phi} \equiv \Omega = cte$  en este problema. Estos resultados en las ecuaciones de Euler, junto con  $\bar{\tau} = 0$ , resultan en

$$\begin{aligned}\lambda_1 \dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_2) \omega_2 \omega_3 &= \lambda_1 \ddot{\theta} + (\lambda_3 - \lambda_1) \Omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0, \\ \lambda_2 \dot{\omega}_2 + (\lambda_1 - \lambda_3) \omega_3 \omega_1 &= \lambda_1 \Omega \dot{\theta} \cos \theta + (\lambda_1 - \lambda_3) \Omega \dot{\theta} \cos \theta = \Omega \dot{\theta} \cos \theta (2\lambda_1 - \lambda_3) = 0, \\ \lambda_3 \dot{\omega}_3 + (\lambda_2 - \lambda_1) \omega_1 \omega_2 &= -\lambda_3 \Omega \cos \theta = 0,\end{aligned}$$

en forma totalmente equivalente se puede plantear el Lagrangiano y las ecuaciones de Euler-Lagrange como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{\lambda_1}{2} \omega_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \omega_2^2 + \frac{\lambda_3}{2} \omega_3^2 = \frac{\lambda_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{\lambda_1}{2} \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{\lambda_3}{2} \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= \frac{d}{dt} (\dot{\phi} (\lambda_1 \sin^2 \theta + \lambda_3 \cos^2 \theta)) = 0 \Rightarrow L_3 = \Omega (\lambda_1 \sin^2 \theta + \lambda_3 \cos^2 \theta) = cte, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \lambda_1 \ddot{\theta} + (\lambda_3 - \lambda_1) \Omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0.\end{aligned}$$

Por cualquiera de ambos métodos se obtiene una ecuación movimiento en  $\theta$ , la cual se puede simplificar como

$$\ddot{\chi} - \Lambda^2 \sin(\chi) = 0, \quad \chi \equiv 2\theta, \quad \Lambda^2 \equiv \Omega^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1} = \Omega^2 \frac{1 - (\sqrt{3}a/l)^2}{1 + (\sqrt{3}a/l)^2}.$$

Considerando  $\ddot{\chi} = 0$ , se verifica que existen posiciones de equilibrio del sistema en  $\chi_e = n\pi$  o, en forma equivalente, en  $\theta_e = n\pi/2$ . Esto implica que habrá posiciones de equilibrio en el rango  $[0, 2\pi)$  en los ángulos

$$\theta_e = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\},$$

las cuáles serán estables o inestables según el valor que adopte  $\Lambda^2$  a partir de la relación de  $a$  con  $l$ . Se verifica que si  $l > \sqrt{3}a$ , entonces  $\Lambda^2 > 0$ , mientras que si  $l < \sqrt{3}a$  se tiene que  $\Lambda^2 < 0$ . Para el caso en que  $l = \sqrt{3}a$  se obtiene una ecuación del tipo  $\ddot{\chi} = 0$ , por tanto  $\ddot{\theta} = 0$ , lo cual equivale a que el sistema equilibra sus rotaciones produciendo un crecimiento lineal de su nutación.

Consideremos el caso en que  $\Lambda^2 > 0$  y que se realizan apartamientos desde la posición de equilibrio tales que  $\chi = \chi_e + \epsilon$  para estudiar cómo evoluciona el sistema. Esta perturbación se refleja como

$$\ddot{\epsilon} + \Lambda^2 \sin(\chi_e + \epsilon) = 0,$$

aplicando un desarrollo en primer orden de  $\sin(\chi'_e + \epsilon)$  en  $\chi'_e = 0$ , junto con que  $\Lambda^2 > 0$ , se tiene que

$$\sin(\chi'_e + \epsilon) \approx \sin(\chi'_e) + \cos(\chi'_e) \epsilon = \epsilon \Rightarrow \ddot{\epsilon} - \Lambda^2 \epsilon = 0 \Rightarrow \epsilon(t) \text{ es solución exponencial (inestable)},$$

del mismo modo, aplicando un desarrollo en primer orden de  $\sin(\chi''_e + \epsilon)$  en  $\chi''_e = \pi$  se obtiene que

$$\sin(\chi''_e + \epsilon) \approx \sin(\chi''_e) + \cos(\chi''_e) \epsilon = -\epsilon \Rightarrow \ddot{\epsilon} + \Lambda^2 \epsilon = 0 \Rightarrow \epsilon(t) \text{ es solución oscilatoria (estable)},$$

en términos del ángulo  $\theta$ ,  $\theta = -\pi/2$  y  $\theta = \pi/2$  son puntos de equilibrio estables, con frecuencia de oscilación  $\Lambda$ .

**13.** Se busca estudiar el Lagrangiano de la barra, el cual vendrá descripto como

$$\mathcal{L} = T_{cm} + T_{rot} - U.$$

En primer lugar, es conveniente describir la posición del centro de masa de la barra, dada por

$$\bar{\mathbf{r}}_{cm} = \bar{\mathbf{z}}_1 + \bar{\mathbf{r}}_2 = (a + l \cos \theta) \hat{\mathbf{z}} + \left( \frac{l}{2} \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \frac{l}{2} \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \frac{l}{2} \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \right),$$

sin perder generalidad, es posible redefinir los ángulos de forma tal que  $\varphi = \phi + \pi$  y  $\vartheta = \theta + \pi/2$ , de forma tal que la expresión se reescribe en términos de las coordenadas esféricas conocidas como

$$\bar{r}_{cm} = \bar{z}_1 + \bar{r}_2 = \frac{l}{2} (\cos \vartheta \cos \varphi \hat{x} + \cos \vartheta \sin \varphi \hat{y} + \sin \vartheta \hat{z}) + a \hat{z} = r \hat{r} + a \hat{z},$$

en cuyo caso, la derivada temporal de la posición del centro de masa y el cuadrado de ésta vendrán como

$$\dot{\bar{r}}_{cm} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\vartheta} \hat{\vartheta} + r \dot{\varphi} \sin \vartheta \hat{\varphi}, \quad \dot{\bar{r}}_{cm}^2 = \frac{l^2 \dot{\vartheta}^2}{4} + \frac{l^2 \dot{\varphi}^2}{4} \cos^2 \vartheta,$$

lo que permite finalmente reescribir la energía cinética del centro de masa como

$$T_{cm} = \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}_{cm}^2 = \frac{ml^2}{8} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta).$$

Por otra parte, la energía potencial debido al campo gravitatorio uniforme vendrá expresada como

$$U = mg(\bar{r}_{cm} \cdot \hat{z}) = mg(\bar{z}_1 \cdot \hat{z} + \bar{r}_2 \cdot \hat{z}) = mg \left( a + \frac{l}{2} \cos \vartheta \right).$$

Por último, resta describir la energía cinética rotacional de la barra, en término de sus momentos principales de inercia y los ángulos de Euler, que también son concordantes con los ángulos  $\vartheta, \varphi$ .

Para el cálculo de los momentos principales de inercia  $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$  se considerará el largo de la barra como  $\hat{3}$ . Luego, la masa total en términos de la densidad de masa lineal de la barra y los momentos principales de inercia serán

$$\begin{aligned} m &= \int dm = \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho \delta_1(x_1) \delta_2(x_2) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{-l/2}^{l/2} \rho_l dx_3 = \rho_l l \Rightarrow \rho_l = \frac{m}{l}, \\ I_{11} &= \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1^2 + x_3^2) \rho \delta_1(x_1) \delta_2(x_2) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{-l/2}^{l/2} \rho_l x_3^2 dx_3 = \frac{\rho_l l^2}{12} = \frac{ml}{12}, \quad I_{11} = I_{22}, \\ I_{33} &= \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1^2 + x_2^2) \rho \delta_1(x_1) \delta_2(x_2) dx_1 dx_2 dx_3, \end{aligned}$$

en cuyo caso, los momentos principales de inercia en la base  $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$  serán

$$\lambda \equiv \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{ml}{12}, \quad \lambda_3 \equiv 0,$$

asimismo, para el cálculo de la base, las rotaciones de Euler nos para dicha base cumplirán que

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} \hat{z} + \dot{\vartheta} \hat{x}' + \dot{\psi} \hat{z}'' = \dot{\varphi} (\cos \vartheta \hat{e}_3 + \sin \vartheta \hat{e}_2) + \dot{\vartheta} \hat{e}_1 = \dot{\vartheta} \hat{e}_1 + \dot{\varphi} \sin \vartheta \hat{e}_2 + \dot{\varphi} \cos \vartheta \hat{e}_3,$$

lo que permite calcular la energía cinética rotacional de la barra como

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \lambda (\omega_1^2 + \omega_2^2) = \frac{ml}{24} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta).$$

Juntando todos los resultados obtenidos anteriormente, el Lagrangiano de la barra será

$$\mathcal{L} = T_{cm} + T_{rot} - U = \frac{ml^2}{8} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta) + \frac{ml}{24} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) - mg \left( a + \frac{l}{2} \cos \vartheta \right),$$

o simplificando, reescribiendo con identidades trigonométricas y quitando los términos constantes se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{ml}{24} (3l + 1) \dot{\vartheta}^2 + \frac{ml}{24} (3l \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) \dot{\varphi}^2 - g \frac{ml}{2} \cos \vartheta - mga, \\ \mathcal{L} &= \frac{ml}{24} (3l + 1) \dot{\vartheta}^2 + \frac{ml}{48} (3l - 1) \cos(2\vartheta) \dot{\varphi}^2 - g \frac{ml}{2} \cos \vartheta \end{aligned}$$

luego, por Euler-Lagrange, las ecuaciones de movimiento y la conservación de  $L_z$  será

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \left( \frac{ml}{24} (3l-1) \dot{\phi} \cos(2\theta) \right) = 0 \Rightarrow L_z = \frac{ml}{24} (3l-1) \dot{\phi} \cos(2\theta) = cte ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{ml}{12} (3l+1) \ddot{\theta} + \frac{ml}{24} (3l-1) \sin(2\theta) \dot{\phi}^2 + g \frac{ml}{2} \sin \theta = 0 .$$

Usando la conservación de  $L_z$  en la segunda ecuación, se obtiene una ecuación de movimiento unidimensional

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{24}{ml} \right)^2 \left( \frac{L_z^2/2}{9l^2 - 1} \right) \frac{\sin(2\theta)}{\cos^2(2\theta)} + \left( \frac{6g}{3l+1} \right) \sin \theta = 0 .$$

**14.** Supongamos conocidos los momentos principales de inercia  $I \equiv I_1 = I_2$  y  $I_3$ , para una base de ejes principales de inercia  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ . Por simetría, la representación en ángulos de Euler de la velocidad angular es

$$\bar{\Omega} = \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{x}' + \dot{\psi} \hat{z}'' = \dot{\phi} (\cos \theta \hat{e}_3 + \sin \theta \hat{e}_2) + \dot{\theta} \hat{e}_1 + \dot{\psi} \hat{e}_3 = \dot{\theta} \hat{e}_1 + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{e}_3 ,$$

$$\Omega_1 = \dot{\theta} , \quad \Omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta , \quad \Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta ,$$

donde se tomará como referencia el punto fijo de apoyo del trompo, por tanto, no habrá energía cinética de traslación y la energía de rotación se podrá representar como

$$T_{rot} = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I}{2} \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 .$$

Por otra parte, se tiene una masa  $m$  colgada en un extremo a distancia  $d$ , y existe sobre un campo gravitatorio uniforme. Suponiendo una masa total  $M$ , la distancia radial al centro de masa será  $r_{cm} = md/M$ , en cuyo caso el potencial del sistema se podrá escribir como

$$U = Mg(\bar{r}_{cm} \cdot \hat{z}) = Mgr_{cm} \cos \theta = mgd \cos \theta .$$

Sumando resultados, simplificando, aplicando propiedades, y quitando la constante arbitraria, el Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = T_{rot} - U = + \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I}{2} \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgd \cos \theta ,$$

mientras que, por Euler-Lagrange, las ecuaciones de movimiento resultantes son

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} (I \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta) = 0 \Rightarrow L_z = I \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta = cte ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = I \ddot{\theta} - I \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\phi} \sin \theta - mgd \sin \theta = 0 ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{d}{dt} (I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)) = 0 \Rightarrow L_3 = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 \Omega_3 = cte ,$$

de esto se verifica que tanto  $L_3$  (momento intrínseco) como  $L_z$  (momento orbital) son magnitudes conservadas, y se supone  $\Omega_3$  conocida. Además, usando la conservación de  $L_3$  en  $L_z$  se puede obtener  $\dot{\phi}(\theta)$  como

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I \sin^2 \theta} .$$

Usando las conservaciones, junto con el  $\dot{\phi}$  hallado, se puede obtener una ecuación de movimiento en  $\theta$  como

$$\ddot{\theta} = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2 \cos \theta}{I^2 \sin^3 \theta} - \frac{L_3 (L_z - L_3 \cos \theta)}{I^2 \sin \theta} + \left( \frac{mgd}{I} \right) \sin \theta .$$

haciendo un desarrollo lineal de la ecuación de movimiento se tiene que

$$\ddot{\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{mgd}{I} , \quad \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} = \frac{L_z^2 + L_3^2}{I^2} , \quad \ddot{\theta} \approx \frac{mgd}{I} + \frac{L_z^2 - L_3^2}{I^2} \theta ,$$

lo que, haciendo cambios de variables, se quedará representado por una ecuación resoluble

$$\ddot{\chi} + \omega_0^2 \chi = 0 , \quad \chi = \theta - \theta_0 , \quad \omega_0^2 = \frac{L_3^2 - L_z^2}{I^2} , \quad \theta_0 = \frac{mgd}{I\omega_0^2} .$$

Resta pues considerar los valores iniciales, que determinarán la magnitud conservada  $\omega_0$  que depende de las magnitudes conservadas  $L_3$  y  $L_z$ . Usando los datos  $\theta(0) = \pi/2$ , junto con  $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ , y suponiendo conocida  $\Omega_3 > 0$ , se pueden calcular las constantes del sistema, pudiendo así resolverse  $\omega_0$  como

$$L_3 = I_3 \Omega_3 , \quad L_z = I \dot{\phi}(0) \sin^2(\theta(0)) + L_3 \cos(\theta(0)) = 0 , \quad \omega_0^2 = \Omega_3^2 ,$$

de forma, dado que  $\omega_0^2 > 0$ , la ecuación diferencial será la de un oscilador armónico de frecuencia  $\Omega_3$ , luego

$$\theta(t) = A \cos(\Omega_3 t + \varphi) + \theta_0 ,$$

Por último, los valores del problema  $A, \varphi$  son determinados por las condiciones iniciales, entonces

$$\dot{\theta}(0) = -A\Omega_3 \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0 , \quad \theta(0) = A + \theta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{2} - \theta_0 ,$$

de forma que la solución general, para las condiciones dadas, será

$$\theta(t) = \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) \cos(\Omega_3 t) + \theta_0 , \quad \theta_0 = \frac{mgd}{I\omega_0^2} , \quad \theta \approx \frac{\pi}{2} .$$