1.a. Se tiene una transformación canónica $(\bar{p},\bar{q}) \to \left(\bar{P}_{(\bar{q},\bar{p})}, \bar{Q}_{(\bar{q},\bar{p})}\right)$ aplicada al Hamiltoniano $H_{(\bar{q},\bar{p})}$. Usando que la transformación es canónica en ambos pares de coordenadas, es posible hallar las relaciones directas como

$$\frac{\partial H}{\partial P_j} = \sum_i \left(\underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}}_{\dot{q}_i} \frac{\partial p_i}{\partial P_j} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_i}}_{-\dot{p}_i} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right) = \dot{Q}_j = \sum_i \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) \Rightarrow \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}, \;\; \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q_j} = \sum_i \left(\underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}}_{\dot{q}_i} \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_i}}_{-\dot{p}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right) = -\dot{P}_j = \sum_i \left(-\frac{\partial P_j}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial P_j}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) \Rightarrow \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}, \;\; \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}.$$

Es posible verificar también, para un espacio unidimensional ($n = 1$), que la transformación será canónica y, por tanto, cumple las relaciones directas, si para el Jacobiano de la transformación J, y su inversa J^{-1}, definidos como

$$J = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}, \qquad J^{-1} = \frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix},$$

se verifica que el $\det(J) = \det(J^{-1}) = 1$. En particular, aplicando la inversa para una matriz cuadrada y que $\det(J) = 1$, se verifican automáticamente las relaciones directas como

$$J^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\det(J)}}_{=1} \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & -\frac{\partial Q}{\partial p} \\ -\frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix}.$$

1.b. Se tiene un Hamiltoniano $H(p,q)$ y se aplica transformación $P_{(q,p)}, Q_{(q,p)}$ de forma que

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2, \qquad Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right), \qquad P = q\cot p .$$

Es posible verificar que es canónica, para un sistema de dimensión 1, calculando determinante del Jacobiano

$$J_{(q,p)} = \begin{pmatrix} -1/q & \cot p \\ \cot p & -q\csc^2 p \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J) = \csc^2 p - \cot^2 p = 1 ,$$

lo que verifica que es canónica pues $\det(J) = 1$, condición suficiente para un espacio de dimensión 1.

Otra forma general de probar si una transformación es canónica es verificando que esto se cumple si y solo si también se cumple la equivalencia $J\mathbb{E}J^T = \mathbb{E}$, donde $\mathbb{E}$ es la matriz simpléctica. Para este caso se verifica que

$$\begin{pmatrix} -1/q & \cot p \\ \cot p & -q\csc^2 p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/q & \cot p \\ \cot p & -q\csc^2 p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que, bajo la anterior consideración, la transformación es canónica. Alternativamente puede probarse que una transformación es canónica si y solo si los corchetes fundamentales de Poisson son preservados, es decir,

$$[P_i, P_j] = 0 , \qquad [Q_i, Q_j] = 0 , \qquad [Q_i, P_j] = \delta_{ij} .$$

Por otra parte, se busca hallar las funciones generatrices $F_1 \equiv F_1(q,Q)$ y $F_2 \equiv F_2(q,P)$, de forma que

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = p = \operatorname{asin}(qe^Q) \Rightarrow F_1 = \sqrt{e^{-2Q} - q^2} + q\operatorname{asin}(qe^Q) + \alpha(Q) ,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P = -q\cot(\operatorname{asin}(qe^Q)) \Longrightarrow F_1 = \sqrt{e^{-2Q} - q^2} + q\operatorname{asin}(qe^Q) + \beta(q)\,,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = p = \operatorname{atan}\left(\frac{q}{P}\right) \Longrightarrow F_2 = q\operatorname{atan}\left(\frac{q}{P}\right) - \frac{P}{2}\ln(q^2 + P^2) + \gamma(P)\,,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P} = Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{q}{P}\right)\right)\right) = -\frac{1}{2}\ln(q^2 + P^2) \Longrightarrow F_2 = P - q\operatorname{atan}\left(\frac{P}{q}\right) - \frac{P}{2}\ln(q^2 + P^2) + \delta(q)\,,$$

igualando los pares de funciones para obtener las constantes de integración se llega a que

$$F_1 = \sqrt{e^{-2Q} - q^2} + q\operatorname{asin}(qe^Q)\ , \qquad F_2 = \cdots .$$

---

2. Se tiene el Hamiltoniano de un oscilador armónico dado por

$$H(p,q) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(q_x^2 + q_y^2\right),$$

al cual se le aplica una transformación $(p,q) \to (P,Q)$ de la forma

$$q_x = \cos\lambda\, Q_x + \frac{\sin\lambda}{m\omega} P_y\,, \qquad q_y = \cos\lambda\, Q_y + \frac{\sin\lambda}{m\omega} P_x\,,$$

$$p_x = -m\omega\sin\lambda\, Q_y + \cos\lambda\, P_x\,, \qquad p_y = -m\omega\sin\lambda\, Q_x + \cos\lambda\, P_y\,.$$

Dicha transformación puede representarse matricialmente y también invertirse de forma tal que

$$A = \cos\lambda\ , \qquad B = \frac{\sin\lambda}{m\omega}\ , \qquad C = -m\omega\sin\lambda\ , \qquad D = \cos\lambda\,,$$

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & B \\ 0 & A & B & 0 \\ 0 & C & D & 0 \\ C & 0 & 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ P_x \\ P_y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{AD - BC}\right)\begin{pmatrix} D & 0 & 0 & -B \\ 0 & D & -B & 0 \\ 0 & -C & A & 0 \\ -C & 0 & 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix},$$

de lo que se verifica también que $AD - BC = 1$. Las ecuaciones de la transformación inversa quedarán como

$$Q_x = \cos\lambda\, q_x - \frac{\sin\lambda}{m\omega} p_y\,, \qquad Q_y = \cos\lambda\, q_y - \frac{\sin\lambda}{m\omega} p_x\,,$$

$$P_x = m\omega\sin\lambda\, q_y + \cos\lambda\, p_x\,, \qquad P_y = m\omega\sin\lambda\, q_x + \cos\lambda\, p_y\,.$$

Es posible chequear la estructura simpléctica de la transformación, es decir que $J\mathbb{E}J^T = \mathbb{E}$, como

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & -B \\ 0 & A & -B & 0 \\ 0 & -C & D & 0 \\ -C & 0 & 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & -C \\ 0 & A & -C & 0 \\ 0 & -B & D & 0 \\ -B & 0 & 0 & D \end{pmatrix} = (AD - BC)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego, ya que $AD - BC = 1$, se preserva la estructura simpléctica y, por tanto, la transformación es canónica. Efectuando directamente el cambio de coordenadas $(p,q) \to (P,Q)$ se verifica que

$$\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} = \frac{m\omega^2}{2}\sin^2\lambda\left(Q_x^2 + Q_y^2\right) + \frac{\cos^2\lambda}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2\right) - \frac{\omega}{2}\sin\lambda\cos\lambda\left(P_x Q_y + P_y Q_x\right)$$

$$\frac{m\omega^2}{2}\left(q_x^2 + q_y^2\right) = \frac{m\omega^2}{2}\cos^2\lambda\left(Q_x^2 + Q_y^2\right) + \frac{\sin^2\lambda}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2\right) + \frac{\omega}{2}\sin\lambda\cos\lambda\left(P_x Q_y + P_y Q_x\right)$$

de forma que el nuevo Hamiltoniano, luego de aplicar la transformación canónica, resulta en

$$H(p,q) = H'(P,Q) = \frac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(Q_x^2 + Q_y^2\right),$$

del cual se puede calcular las ecuaciones de Hamilton equivalentes para (P,Q) dadas por

$$\dot{Q}_x = \frac{\partial H'}{\partial P_x} = mP_x\,, \qquad \dot{Q}_y = \frac{\partial H'}{\partial P_y} = mP_y\,,$$

$$\dot{P}_x = -\frac{\partial H'}{\partial Q_x} = -m\omega^2 Q_x\,, \qquad \dot{P}_y = -\frac{\partial H'}{\partial Q_y} = -m\omega^2 Q_y\,,$$

lo que deriva en ecuaciones de movimiento desacopladas y sus correspondientes soluciones

$$\ddot{Q}_x + \Omega_0^2 Q_x = 0, \qquad \ddot{Q}_y + \Omega_0^2 Q_y = 0, \qquad \Omega_0 = m\omega\,,$$

$$Q_x(t) = A_x\cos(\Omega_0 t + \varphi_x)\,, \qquad Q_y(t) = A_y\cos\left(\Omega_0 t + \varphi_y\right).$$

Aplicando las condiciones iniciales $q_y(0) = p_y(0) = 0$, y definiendo $q_0 \equiv q_x(0) > 0$ y $p_0 \equiv p_x(0) > 0$, las condiciones iniciales para las nuevas coordenadas quedarán escritas

$$Q_x(0) = q_0\cos\lambda\,, \qquad Q_y(0) = -\frac{p_0}{m\omega}\sin\lambda\,, \qquad P_x(0) = p_0\cos\lambda\,, \qquad P_y(0) = \frac{m\omega}{q_0}\sin\lambda\,,$$

cuyo movimiento puede ser estudiado desde el espacio de fases, o bien a partir las soluciones dadas antes como

$$Q_x(0) = A_x\sin(\varphi_x) = q_0\cos\lambda\,, \qquad P_x(0) = \frac{1}{m}\dot{Q}_x(0) = A_x\frac{\Omega_0}{m}\cos(\varphi_x) = p_0\cos\lambda\,,$$

$$Q_y(0) = A_y\cos\left(\varphi_y\right) = -\frac{p_0}{\Omega_0}\sin\lambda\,, \qquad P_y(0) = \frac{1}{m}\dot{Q}_y(0) = -A_y\frac{\Omega_0}{m}\sin\left(\varphi_y\right) = \frac{\Omega_0}{q_0}\sin\lambda\,,$$

de forma tal que las soluciones, para dadas condiciones iniciales, tomarán la forma

$$Q_x(t) = A_x\sin(\Omega_0 t + \varphi_x)\,, \qquad A_x = \frac{\cos\lambda}{\Omega_0}\sqrt{\Omega_0^2 q_0^2 + m^2 p_0^2}\,, \qquad \varphi_x = \operatorname{atan}\left(\frac{mp_0}{\Omega_0 q_0}\right),$$

$$Q_y(t) = A_y\cos\left(\Omega_0 t + \varphi_y\right), \qquad A_y = \frac{\sin\lambda}{\Omega_0 q_0}\sqrt{q_0^2 p_0^2 + m^2\Omega_0^2}\,, \qquad \varphi_y = \operatorname{atan}\left(\frac{m\Omega_0}{q_0 p_0}\right),$$

en todo caso, con frecuencia de oscilación determinada por $\Omega_0 = m\omega$.

---

3. Se dirá que dos variables resultan canónicas si son constantes de movimiento y la base que conforman cumplen, como mínimo, la relación fundamental $\left[p_i, p_j\right] = 0$. Puntualmente, se verifica que si $[L^2, H] = 0$, entonces H, L^2 pueden ser variables canónicas por ser constantes de movimiento. Del mismo modo puede probarse que si L_z es una magnitud conservada, se verifica que $[L_z, H] = 0$, siendo L_z, H otra base posible.

Sin embargo, como se ve más adelante probando corchetes de Poisson, se verifica que

$$\left[L_y, L_z\right] = yp_z - zp_y = L_x\,, \qquad [L_z, L_x] = zp_x - xp_z = L_y\,, \qquad \left[L_x, L_y\right] = xp_y - yp_x = L_z\,,$$

por lo que los pares L_x, L_y o L_x, L_z o L_y, L_z no pueden ser variables canónicas en simultáneo, ya que no conforman una base canónica no nula tal que $\left[p_i, p_j\right] = 0$ y, por ende, no son constantes de movimiento.

---

4. Se busca hallar una base (P,Q) de transformación canónica y el valor de λ tal que

$$F_1(q,Q) = \lambda q^2\cot Q\,, \qquad K(Q,P) = \omega P\,,$$

siendo F_1 la función generatriz, K el nuevo Hamiltoniano y ω la frecuencia de oscilación del oscilador armónico.

Por un lado, la función $F_1(q,Q)$ que no depende explícitamente del tiempo, debe cumplir las siguientes relaciones

$$P = \frac{\partial F_1}{\partial Q} = -\lambda q^2 \csc^2 Q \ , \qquad p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = 2\lambda q \cot Q \ ,$$

de lo cual se pueden obtener relaciones para $p(P,Q)$ y $q(P,Q)$ como

$$q^2 = -\frac{P}{\lambda}\sin^2 Q \ , \qquad p^2 = -4\lambda P \cos^2 Q \ .$$

Usando que $K(P,Q) = H(p,q)$, pues $\partial F_1/\partial t = 0$, y que H es el oscilador armónico, se obtiene que

$$K = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = -P\omega\left(\frac{m\omega}{2\lambda}\right)\left(\sin^2 Q + \left(\frac{m\omega}{2\lambda}\right)^{-2}\cos^2 Q\right),$$

de forma que para $\lambda = -m\omega/2$, se obtiene que el nuevo Hamiltoniano de la transformación será $K = P\omega$.

Por último, resta verificar que dicha transformación es canónica. Usando relaciones, P, Q se reescriben como

$$Q = \operatorname{atan}\left(2\lambda\frac{q}{p}\right) , \qquad P = -\left(\frac{p^2}{4\lambda} + \lambda q^2\right),$$

verificándose que, pues (Q,P) es de dimensión 1, es canónica pues $\det(J) = 1$, es decir que

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial P}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2\lambda p}{p^2 + 4\lambda^2 q^2} & \dfrac{2\lambda q}{p^2 + 4\lambda^2 q^2} \\ -2\lambda q & -p/2\lambda \end{pmatrix} , \qquad \det(J) = 1 \ .$$

---

5. Se busca estudiar parámetros α, β constantes de una transformación para que ésta sea canónica, cuya base es

$$Q = q^\alpha \cos(\beta p) \ , \qquad P = q^\alpha \sin(\beta p) \ .$$

Para que una transformación sea canónica, necesariamente la base debe ser canónica. Una forma verificar que la base sea canónica es verificando los corchetes fundamentales de Poisson, es decir, para este caso, que

$$[Q,Q] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} \ , \qquad [P,P] = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 0 \ , \qquad [Q,P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1 \ ,$$

verificándose trivialmente los dos primeros corchetes de Poisson $[Q,Q] = [P,P] = 0$.

Supóngase ahora que $\beta = 1$, entonces se verifica que $[Q,P] = 0 \neq 1$; por otro lado, si $\beta \neq 1$ y $\alpha = 1$ se tiene que

$$[Q,P] = \beta \ln(q) = 1 \ ,$$

pero cuya relación sólo sería válida si $q \equiv q_0$ y $\beta \equiv 1/\ln(q_0)$, en cuyo caso q no formaría una base para p. Por último, se puede considerar el caso general en que $\beta \neq 1$ y $\alpha \neq 1$, en cuyo caso

$$[Q,P] = \alpha\beta q^{2\alpha-1} = 1 \ ,$$

lo cual tiene solución única para $\alpha = 1/2$ y $\beta = 2$, de forma que, de ser una transformación canónica, la base necesariamente debe cumplir dichas condiciones. Luego, la nueva base quedará escrita como

$$Q = \sqrt{q}\cos(2p) \ , \qquad P = \sqrt{q}\sin(2p) \ .$$

Es posible verificar que la transformación sea efectivamente canónica a través de la matriz de transformación

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p}\\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\cos(2p)}{2\sqrt{q}} & -2\sqrt{q}\sin(2p)\\ \frac{\sin(2p)}{2\sqrt{q}} & 2\sqrt{q}\cos(2p)\end{pmatrix}\,, \qquad \det(J)=1\,,$$

dado que la base (Q,P) es de dimensión 1, haber verificado el determinante de la matriz Jacobiana igual a 1, es condición suficiente para confirmar que la transformación sea canónica, lo que es equivalente a probar la estructura simpléctica $\mathbb{E}$ como $J\mathbb{E}J^T=\mathbb{E}$ y, por tanto, las relaciones directas.

Para hallar la función generatriz $F_3(p,Q)$ es necesario declarar explícitamente $q(p,Q)$ y $P(p,Q)$. Haciendo despejes y relaciones de la base canónica hallada se obtiene que

$$q(p,Q)=\frac{Q^2}{\cos^2(2p)}\,, \qquad P(p,Q)=Q\tan(2p)\,,$$

lo que permite calcular la función generatriz $F_3(p,Q)$ a partir de sus relaciones

$$\frac{\partial F_3}{\partial p}=-q=\frac{-Q^2}{\cos^2(2p)}\Longrightarrow F_3=-\frac{1}{2}Q^2\tan(2p)+\alpha(Q,t)\,,$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial Q}=-P=-Q\tan(2p)\Longrightarrow F_3=-Q^2\tan(2p)+\beta(p,t)\,,$$

igualando se llega a que $\alpha=\beta=0$, si se considera que es una transformación canónica restringida, es decir, que no incluye explícitamente el tiempo. En tal caso, la función generatriz F_3 para dicha transformación será

$$F_3(p,Q)=-\frac{1}{2}Q^2\tan(2p)\,.$$

---

7. Se definen los corchetes de Poisson para una base $(\bar{p},\bar{q})$ y funciones $u_{(\bar{p},\bar{q})}, v_{(\bar{p},\bar{q})}$ como

$$[u,v]\equiv[u,v]_{(\bar{p},\bar{q})}=\sum_i\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i}-\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right),$$

siendo la base omisible pues los corchetes son invariantes ante transformaciones canónicas y, por tanto, no dependen de la base elegida. Siendo ahora f,g,h funciones arbitrarias de $\bar{p},\bar{q}$; $F(f)$ una función de f y c una constante, se prueban las siguientes propiedades

$$(a)\ [f,c]=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\underbrace{\frac{\partial c}{\partial p_i}}_{=0}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\underbrace{\frac{\partial c}{\partial q_i}}_{=0}\right)=0\,,$$

$$(b)\ [f,f]=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}-\underbrace{\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}}_{conmuta}\right)=0\,,$$

$$(c)\ [f,g]+[g,f]=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)+\sum_i\left(\underbrace{\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}}_{conmuta}-\underbrace{\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}}_{conmuta}\right)=0\,,$$

$$(d)\ [f+g,h]=\sum_i\left(\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}+\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)\frac{\partial h}{\partial p_i}-\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}+\frac{\partial g}{\partial p_i}\right)\frac{\partial h}{\partial q_i}\right)=\sum_i\left(\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}\right)+\left(\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}-\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}\right)\right)$$
$$=[f,h]+[g,h]\,,$$

$$(e)\ [fg,h]=\sum_i\left(\frac{\partial(fg)}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}-\frac{\partial(fg)}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}\right)=\sum_i\left(\left(f\frac{\partial g}{\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial q_i}g\right)\frac{\partial h}{\partial p_i}-\left(f\frac{\partial g}{\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial p_i}g\right)\frac{\partial h}{\partial q_i}\right)$$

$$=\sum_i\left(\left(f\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}-f\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}g-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}g\right)\right)=f[g,h]+[f,h]g\,,$$

$$(f)\ \frac{\partial[f,g]}{\partial t}=\sum_i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)=\sum_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)\frac{\partial g}{\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial p_i}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)\right)$$

$$=\sum_i\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial g}{\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)=\left[\frac{\partial f}{\partial t},g\right]+\left[f,\frac{\partial g}{\partial t}\right],$$

$$(g)\ [f,F(f)]=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\underbrace{\frac{\partial F}{\partial p_i}}_{=0}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\underbrace{\frac{\partial F}{\partial q_i}}_{=0}\right)=0\,.$$

(h) A continuación, se muestran los corchetes fundamentales de Poisson, válidos si y solo si la base es canónica:

$$[q_i,q_j]=\sum_k\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{=0}-\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{=0}\frac{\partial q_j}{\partial q_k}\right)=0\,,$$

$$[p_i,p_j]=\sum_k\left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_{=0}\frac{\partial p_j}{\partial p_k}-\frac{\partial p_i}{\partial p_k}\underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{=0}\right)=0\,,$$

$$[q_i,p_j]=\sum_k\left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}}\underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}}-\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{=0}\underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{=0}\right)=\delta_{ij}\,.$$

(i) A continuación, se muestra la identidad de Jacobi:

$$\big[f,[g,h]\big]+\big[g,[h,f]\big]+\big[h,[f,g]\big]=0=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial[g,h]}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial[g,h]}{\partial q_i}\right)+\cdots+\cdots$$

$$=\sum_i\sum_j\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j}-\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}\right)-\sum_i\sum_j\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j}-\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}\right)+\cdots+\cdots$$

$$=\sum_i\sum_j\left(+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j}+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i\partial q_j}\right)$$

$$+\sum_i\sum_j\left(-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_i\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_i\partial p_j}+\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_i\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}+\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q_i\partial q_j}\right)$$

$$+\sum_i\sum_j\left(+\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}+\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial p_j}-\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}-\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial q_j}\right)$$

$$+\sum_i\sum_j\left(-\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_i\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}-\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial p_j}+\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q_i\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}+\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial q_j}\right)$$

$$+\sum_i\sum_j\left(+\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}+\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i\partial p_j}-\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}-\frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i\partial q_j}\right)$$

$$+\sum_i\sum_j\left(-\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}-\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_i\partial p_j}+\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}+\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q_i\partial q_j}\right)=0\,,$$

---

8. Sean f,g constantes de movimiento de un sistema que no dependen explícitamente del tiempo y H el Hamiltoniano, magnitud conservada. Mediante corchetes de Poisson y la identidad de Jacobi se prueba que

$$[f,[g,H]]+[g,[H,f]]+[H,[f,g]]=[f,0]+[g,0]+[H,[f,g]]=[H,[f,g]]=0\,,$$

de lo que queda demostrado que $[f,g]$ también es una cantidad conservada del sistema.

Es posible verificar que $\bar{L}$ forma una base de coordenadas canónicas si se cumple que $[L_i,L_j]=0\ \ \forall\, i\neq j$.

Se calculan explícitamente los siguientes corchetes de Poisson del momento angular $\bar{L}$ dado por

$$\bar{L}=(L_x,L_y,L_z)=(yp_z-zp_y,zp_x-xp_z,xp_y-yp_x)\,,\qquad L^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2$$

$$[L_x,x]=[yp_z-zp_y,x]=[yp_z,x]-[zp_y,x]=y[p_z,x]+[y,x]p_z-z[p_y,x]-[z,x]p_y=0\,,$$

$$[L_x,y]=[yp_z-zp_y,y]=[yp_z,y]-[zp_y,y]=y[p_z,y]+[y,y]p_z-z[p_y,y]-[z,y]p_y=z[y,p_y]=z\,,$$

$$[L_x,z]=[yp_z-zp_y,z]=[yp_z,z]-[zp_y,z]=y[p_z,z]+[y,z]p_z-z[p_y,z]-[z,z]p_y=-y[z,p_z]=-y\,,$$

$$[L_y,x]=[zp_x-xp_z,x]=[zp_x,x]-[xp_z,x]=z[p_x,x]+[z,x]p_x-x[p_z,x]-[x,x]p_z=-z[x,p_x]=-z\,,$$

$$[L_y,y]=[zp_x-xp_z,y]=[zp_x,y]-[xp_z,y]=z[p_x,y]+[z,y]p_x-x[p_z,y]-[x,y]p_z=0\,,$$

$$[L_y,z]=[zp_x-xp_z,z]=[zp_x,z]-[xp_z,z]=z[p_x,z]+[z,z]p_x-x[p_z,z]-[x,z]p_z=x[z,p_z]=x\,,$$

$$[L_z,x]=[\,xp_y-yp_x,x]=[xp_y,x]-[yp_x,x]=x[p_y,x]+[x,x]p_y-y[p_x,x]-[y,x]p_x=y[x,p_x]=y\,,$$

$$[L_z,y]=[\,xp_y-yp_x,y]=[xp_y,y]-[yp_x,y]=x[p_y,y]+[x,y]p_y-y[p_x,y]-[y,y]p_x=-x[y,p_y]=-x\,,$$

$$[L_z,z]=[\,xp_y-yp_x,z]=[xp_y,z]-[yp_x,z]=x[p_y,z]+[x,z]p_y-y[p_x,z]-[y,z]p_x=0\,,$$

$$[L_x,p_x]=[yp_z-zp_y,p_x]=[yp_z,p_x]-[zp_y,p_x]=y[p_z,p_x]+[y,p_x]p_z-z[p_y,p_x]-[z,p_x]p_y=0\,,$$

$$[L_x,p_y]=[yp_z-zp_y,p_y]=[yp_z,p_y]-[zp_y,p_y]=y[p_z,p_y]+[y,p_y]p_z-z[p_y,p_y]-[z,p_y]p_y=p_z\,,$$

$$[L_x,p_z]=[yp_z-zp_y,p_z]=[yp_z,p_z]-[zp_y,p_z]=y[p_z,p_z]+[y,p_z]p_z-z[p_y,p_z]-[z,p_z]p_y=-p_y\,,$$

$$[L_y,p_x]=[zp_x-xp_z,p_x]=[zp_x,p_x]-[xp_z,p_x]=z[p_x,p_x]+[z,p_x]p_x-x[p_z,p_x]-[x,p_x]p_z=-p_z\,,$$

$$[L_y,p_y]=[zp_x-xp_z,p_y]=[zp_x,p_y]-[xp_z,p_y]=z[p_x,p_y]+[z,p_y]p_x-x[p_z,p_y]-[x,p_y]p_z=0\,,$$

$$[L_y,p_z]=[zp_x-xp_z,p_z]=[zp_x,p_z]-[xp_z,p_z]=z[p_x,p_z]+[z,p_z]p_x-x[p_z,p_z]-[x,p_z]p_z=p_x\,,$$

$$[L_z,p_x]=[\,xp_y-yp_x,p_x]=[xp_y,p_x]-[yp_x,p_x]=x[p_y,p_x]+[x,p_x]p_y-y[p_x,p_x]-[y,p_x]p_x=p_y\,,$$

$$[L_z,p_y]=[\,xp_y-yp_x,p_y]=[xp_y,p_y]-[yp_x,p_y]=x[p_y,p_y]+[x,p_y]p_y-y[p_x,p_y]-[y,p_y]p_x=-p_x\,,$$

$$[L_z,p_z]=[\,xp_y-yp_x,p_z]=[xp_y,p_z]-[yp_x,p_z]=x[p_y,p_z]+[x,p_z]p_y-y[p_x,p_z]-[y,p_z]p_x=0\,,$$

$$[L_y,L_z]=[zp_x-xp_z,L_z]=z[p_x,L_z]+[z,L_z]p_x-x[p_z,L_z]-[x,L_z]p_z=yp_z-zp_y=L_x\,,$$

$$[L_z,L_x]=[xp_y-yp_x,L_x]=x[p_y,L_x]+[x,L_x]p_y-y[p_x,L_x]-[y,L_x]p_x=zp_x-xp_z=L_y\,,$$

$$[L_x,L_y]=[yp_z-zp_y,L_y]=y[p_z,L_y]+[y,L_y]p_z-z[p_y,L_y]-[z,L_y]p_y=xp_y-yp_x=L_z\,,$$

$$[L^2,L_x]=[L_x^2+L_y^2+L_z^2,L_x]=[L_x^2,L_x]+[L_y^2,L_x]+[L_z^2,L_x]=0+2L_y[L_y,L_x]+2L_z[L_z,L_x]=0\,,$$

$$[L^2,L_y]=[L_x^2+L_y^2+L_z^2,L_y]=[L_x^2,L_y]+[L_y^2,L_y]+[L_z^2,L_y]=2L_x[L_x,L_y]+0+2L_z[L_z,L_y]=0\,,$$

$$[L^2,L_z]=[L_x^2+L_y^2+L_z^2,L_z]=[L_x^2,L_z]+[L_y^2,L_z]+[L_z^2,L_z]=2L_x[L_x,L_z]+2L_y[L_y,L_z]+0=0\,.$$

---

9. Se busca encontrar una transformación canónica $H(p,q)\rightarrow K(P,Q)$ de forma tal que

$$H(p,q) = p^2 + q^2 , \qquad K(P,Q) = P^2Q^4 + \frac{1}{Q^2} , \qquad q = \frac{1}{Q} .$$

Una posible solución, si la transformación es restringida, sería pensar que $H = K$ y, por tanto, que $p = \pm PQ^2$. Esta solución verifica los dos primeros corchetes fundamentales de Poisson $[q,q] = [p,p] = 0$ mientras que el tercer corchete de Poisson se verifica sólo si $p = -PQ^2$. Este resultado se puede hallar explícitamente como

$$[q,p] = 1 \Longrightarrow [q,p] = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = -\frac{1}{Q^2}\frac{\partial p}{\partial P} = 1 \Longrightarrow \frac{\partial p}{\partial P} = -Q^2 \Longrightarrow p(Q,P,t) = -PQ^2 + \alpha_{(Q,t)} ,$$

donde, considerando que $Q = Q_{(q)}$, el término $\alpha \equiv \alpha_{(Q,t)} = \alpha_{(q,t)}$ vale si la transformación no es restringida, siendo $\alpha = 0$ en caso contrario. Suponiendo la transformación no restringida se tiene que

$$Q = 1/q , \qquad P = q^2(\alpha - p) .$$

cuya transformación siempre resultará canónica pues se verifica para dimensión 1 que

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial P}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{q^2} & 0 \\ 2q(\alpha - p) & -q^2 \end{pmatrix} , \qquad \det(J) = 1 .$$

Por otra parte, se puede hallar una expresión derivada de la generatriz partiendo de la expresión general

$$K = H - \frac{\partial F}{\partial t} \Longrightarrow P^2Q^4 + \frac{1}{Q^2} = P^2Q^4 + \alpha^2 - PQ^2\alpha + \frac{1}{Q^2} - \frac{\partial F}{\partial t} \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = \alpha^2(1 - PQ^2) ,$$

además, si escribimos la expresión la generatriz como $F \equiv F_2(q,P,t)$ junto con sus relaciones, se obtiene que

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = \alpha^2\left(1 - \frac{P}{q^2}\right) , \qquad \frac{\partial F_2}{\partial q} = \alpha - \frac{P}{q^2} , \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q = \frac{1}{q} .$$

Para estudiar la expresión de α y de la generatriz F_2 se pueden correlacionar las derivadas cruzadas en p, q, t. En primer lugar, se puede verificar, usando la primera y tercera ecuación, que $\alpha \equiv 0$ pues

$$\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{\partial F_2}{\partial t}\right) = -\frac{\alpha^2}{q^2} , \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_2}{\partial P}\right) = 0 , \qquad \alpha \equiv 0 ,$$

de forma que, como $\alpha \equiv 0$, la única solución posible es aquella en que $\partial F/\partial t = 0$. En tal caso, no hay dependencia temporal explícita y $P = -pq^2$. Usando luego la segunda y la tercera ecuación se puede hallar F_2 tal que

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = -\frac{P}{q^2} \Longrightarrow F_2 = \frac{P}{q} + f_P(P) , \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P} = \frac{P}{q} + f_q(q) , \qquad f_P(P) = f_q(q) = 0 ,$$

luego, la única transformación posible para el Hamiltoniano propuesto y $Q = 1/q$, junto con su generatriz, será

$$Q = 1/q , \qquad P = -pq^2 , \qquad F \equiv F_2(q,P) = P/q .$$

---

10. Se tiene una transformación canónica $H(p,q) \to K(P,Q)$ de la que se conoce sólo $Q(p,q)$ dada por

$$Q = \frac{p}{f'_{(q)}} , \qquad f'_{(q)} = \frac{df_{(q)}}{dq} .$$

Primeramente, tomando $p = f'_{(q)}Q$ y $\alpha \equiv \alpha_{(Q,t)}$, es posible estudiar $F = F_1(q,Q,t)$ y sus relaciones como

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = p = f'_{(q)}Q \Longrightarrow F_1 = f_{(q)}Q + \alpha_{(Q,t)} , \qquad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -f_{(q)} - \frac{\partial \alpha_{(Q,t)}}{\partial Q} ,$$

donde se puede considerar el caso particular en que $\alpha \equiv 0$, en cuyo caso la función generatriz y la base serán

$$F \equiv F_1(q,Q) = f_{(q)}Q\ , \qquad Q = p/f'_{(q)}\ , \qquad P = -f_{(q)}\ ,$$

asimismo, se verifica que la transformación es canónica, pues la matriz de corchetes de Poisson es simpléctica,

$$\begin{pmatrix} [Q,Q] & [Q,P] \\ [P,Q] & [P,P] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{E}\ .$$

La hipótesis propuesta, es decir, el caso particular que $\alpha_{(Q,t)} \equiv 0$, implica que el Hamiltoniano no depende en forma explícita del tiempo y tampoco su función generatriz, lo que resulta en una transformación restringida.

Por otra parte, suponiendo conocida en forma directa la base como $(Q,P) = (pq, -\ln q)$, lo cual resulta en el caso particular en que $f_{(q)} = \ln q$, es posible verificar que la transformación canónica pues de igual modo, como fue probado antes, respecta la estructura simpléctica al efectuar la matriz de corchetes de Poisson.

---

11. Sea $f = f(\bar{q},\bar{p},t)$ con $\bar{q} = q_1, \dots, q_n$ y $\bar{p} = p_1, \dots, p_n$. Se prueba que

$$\frac{df}{dt} = \sum\nolimits_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial t}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum\nolimits_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = [f,H] + \frac{\partial f}{\partial t}\,.$$

Si ahora $f = q_i$ o $f = p_i$, el corchete de Poisson resultará nulo, entonces se obtiene que

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial t}\ , \qquad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial p_i}{\partial t}\,.$$

Por otra parte, si f no depende explícitamente del tiempo y es constante de movimiento se cumple que

$$\frac{df}{dt} = [f,H] = 0\ .$$

Apéndice. Desarrollo de las funciones generatrices F_1, F_2, F_3, F_4:

$$p_i\dot{q}_i - H = P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}\,,$$

$$F = F_1(q,Q,t) \Longrightarrow K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} - p_i\right)\dot{q}_i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} + P_i\right)\dot{Q}_i\ ,$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \qquad p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\,.$$

$$F = F_2(q,P,t) - Q_iP_i \Longrightarrow K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} - p_i\right)\dot{q}_i + \left(\frac{\partial F_2}{\partial P_i} - Q_i\right)\dot{P}_i\ ,$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \qquad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\ , \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\,.$$

$$F = F_3(p,Q,t) + p_iq_i \Longrightarrow K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} + \left(\frac{\partial F_3}{\partial p_i} + q_i\right)\dot{p}_i + \left(\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} + P_i\right)\dot{Q}_i\ ,$$

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}, \qquad q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}\,.$$

$$F = F_4(p,P,t) + p_iq_i - Q_iP_i \Longrightarrow K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} + \left(\frac{\partial F_4}{\partial p_i} + q_i\right)\dot{p}_i + \left(\frac{\partial F_4}{\partial P_i} - Q_i\right)\dot{Q}_i\ ,$$

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}, \qquad q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}\,.$$