

0. Una lámina de dimensiones  $A$  contiene un número  $N_{tar}$  de partículas (blancos) de forma que

$$N_{tar} = n_{tar}A ,$$

siendo  $n_{tar}$  la densidad de partículas contenidas superficialmente en toda la superficie. Cada uno de los  $N_{tar}$  blancos tendrá un área efectiva de interacción  $\sigma$  en términos de sus radios  $R$ , luego

$$\sigma = \pi R^2 ,$$

de forma que el área efectiva de interacción total en la lámina  $A_{tar}$  (formada por todos los blancos) será

$$A_{tar} = n_{tar}A\sigma ,$$

esto permite calcular la probabilidad  $P$  de que una partícula incidente interactúe con algún blanco obteniéndose

$$P = \frac{A_{tar}}{A} = \frac{n_{tar}A\sigma}{A} = n_{tar}\sigma ,$$

a su vez, pensando un número de partículas  $N_{inc}$  incidentes y  $N_{sc}$  dispersadas, siendo  $P = N_{sc}/N_{inc}$ , se obtiene

$$N_{sc} = N_{inc}n_{tar}\sigma , \quad (I)$$

o bien, dividiendo por un tiempo  $\Delta t$ , como la tasa  $R_{inc}$  y  $R_{sc}$  de partículas incidentes y dispersadas, es decir,

$$R_{sc} = R_{inc}n_{tar}\sigma .$$

Por otra parte, el ángulo sólido para una esfera de radio  $r$  y una proyección de área  $A$  en su superficie se define

$$\Delta\Omega = \frac{A}{r^2} ,$$

siendo su unidad  $sr$  el “steradian”. En términos diferenciales el ángulo sólido se puede escribir como

$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta d\phi ,$$

lo que permitirá reescribir el área eficaz  $\sigma$  como un diferencial de área efectiva  $d\sigma/d\Omega$ , de forma que

$$d\sigma \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega ,$$

siendo  $d\Omega$  el diferencial de ángulo sólido, de forma que la expresión (I) quedará reescrita como

$$N_{sc} = N_{inc}n_{tar} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi) d\Omega , \quad (II)$$

donde  $(\theta, \phi)$  enfatizan que la sección efectiva diferencial  $d\sigma/d\Omega$  depende del ángulo de observación. Es posible recuperar el área efectiva de interacción integrando su par diferencial, luego

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi) d\Omega = \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi) .$$

El diferencial de área efectiva  $d\sigma/d\Omega$  puede ser simplificado considerando que el scattering es axialmente simétrico (es decir,  $\phi$  es invariante). Con este fin se busca hallar  $\theta \equiv \theta(b)$  donde  $b$  es el parámetro de impacto de las partículas incidentes respecto del centro del blanco. De esta forma, entre  $b$  y  $b + db$  se halla un área efectiva

$$d\sigma = 2\pi b db ,$$

y, luego de interactuar, las partículas dispersadas emergen en ángulos  $\theta$  y  $\theta + d\theta$  en un ángulo sólido

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta ,$$

lo que, por último, permite reescribir la sección efectiva diferencial  $d\sigma/d\Omega$  en términos de  $(b, \theta)$  como

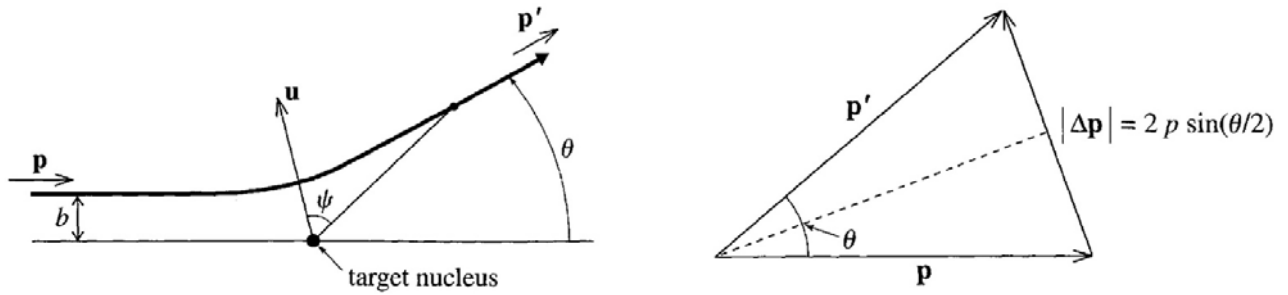
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|, \quad (III)$$

donde el valor absoluto asegura que  $d\sigma/d\Omega$  sea siempre un término positivo ( $\theta$  a veces decrece si  $b$  aumenta).

El caso más significativo de dispersión es el Scattering de Rutherford, en el cual existe la fuerza de Coulomb

$$F = \frac{kqQ}{r^2} = \frac{\gamma}{r^2},$$

y a cuyo caso se intentará buscar una expresión para el diferencial de área efectiva  $d\sigma/d\Omega$ . En el experimento se incide con partículas  $\alpha$  que se verán sometidas a la anterior interacción de Coulomb producto de un núcleo, que actúa como blanco. Éste es un problema de fuerzas centrales, en el cual la partícula  $\alpha$  realiza una órbita hiperbólica. Se supondrá que cada partícula  $\alpha$  que incida con parámetro de impacto  $b$  y cierto momento lineal  $\vec{p}$  saldrá a tiempos largos con ángulo de dispersión  $\theta$  y momento lineal  $\vec{p}'$ . Se tomará el vector unitario  $\vec{u}$  medido desde el foco de la elipse (blanco) y subtenderá un ángulo  $\psi$  coincidente con la posición de la partícula  $\alpha$ .



La relación entre  $d\sigma/d\Omega$  y la interacción de Coulomb vendrá dada por el análisis de la conservación del módulo del momento lineal; si bien el momento lineal no se conserva, sí se conserva éste en módulo, debido a que la energía del sistema se conserva y la energía es sólo cinética para tiempos  $t \rightarrow \pm\infty$ . Con este objetivo, se analizará y correlacionará la variación momento lineal de dos formas distintas para luego igualarlos, a saber,

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}' - \vec{p}, \quad \Delta \vec{p} = \int \vec{F} dt.$$

Para la primera igualdad, se puede observar que  $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$ , por lo que usando trigonometría se llega a que

$$|\Delta \vec{p}| = 2p \sin(\theta/2),$$

notando que  $\Delta \vec{p}$  tiene la dirección del vector unitario  $\vec{u}$ , de modo en que en la restante igualdad la fuerza se puede reemplazar por  $F_u$  en la dirección de  $\vec{u}$ , con lo que tomando los límites en  $\pm\infty$  se obtendrá que

$$|\Delta \vec{p}| = \int_{-\infty}^{\infty} F_u dt,$$

usando luego que  $\psi \rightarrow \pm\psi_0$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , se podrá considerar  $F_u = (\gamma/r^2) \cos \psi$  con los correspondientes límites de integración. Además, reescribiendo  $dt = d\psi/\dot{\psi}$ , usando la definición de momento angular de forma que  $\dot{\psi} = l/mr^2 = bp/mr^2$  y además  $\psi_0 = (\theta - \pi)/2$ , se podrá reescribir la igualdad como

$$|\Delta \vec{p}| = \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \frac{\gamma \cos \psi}{r^2} \frac{d\psi}{bp/mr^2} = \frac{\gamma m}{bp} 2 \sin \psi_0 = 2 \cos(\theta/2).$$

Igualando ambas ecuaciones propuestas inicialmente para la variación de momento lineal, y suponiendo conocida la velocidad de la partícula, el parámetro de impacto queda en términos del ángulo de dispersión como

$$b = \frac{\gamma m \cos(\theta/2)}{p^2 \sin(\theta/2)} = \frac{\gamma}{mv^2} \cot(\theta/2),$$

pudiéndose ahora calcular expresión para el diferencial de área efectiva  $d\sigma/d\Omega$  buscada inicialmente, quedando

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{(\gamma/mv^2) \cot(\theta/2)}{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} \cdot \frac{(\gamma/mv^2)}{2 \sin^2(\theta/2)},$$

por último, reemplazando  $\gamma = kqQ$  y usando la energía de las partículas incidentes  $E = mv^2/2$ , es posible recuperar la fórmula de Scattering de Rutherford, la cual viene dada como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{kqQ}{4E \sin^2(\theta/2)} \right)^2, \quad (IV)$$

y puede ser redefinida sólo en términos de la dependencia angular como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{\sigma_0(E)}{\sin^4(\theta/2)}, \quad \sigma_0(E) = \left( \frac{kqQ}{4E} \right)^2.$$

**1.** Consideremos la luna  $L$  de radio  $R_L \approx 1.84 \times 10^6 \text{ m}$  y el Sol  $S$  de radio  $R_S \approx 6.96 \times 10^8 \text{ m}$ , vistos desde la tierra a distancias  $d_L \approx 3.84 \times 10^8 \text{ m}$  y  $d_S \approx 1.5 \times 10^{11}$ . Los ángulos sólidos en cada caso serán

$$\Delta\Omega_L = \frac{\pi R_L^2}{d_L^2} \approx \pi \frac{529}{2304} \times 10^{-4} \approx 7.21 \times 10^{-5} \text{ sr},$$

$$\Delta\Omega_S = \frac{\pi R_S^2}{d_S^2} \approx \pi \frac{13456}{625} \times 10^{-6} \approx 6.75 \times 10^{-5} \text{ sr},$$

debido a que  $\Omega_L$  es muy similar a  $\Omega_S$ , ambos astros vistos desde la tierra aparentan el mismo tamaño. Por otra parte, la totalidad del cielo representado como una esfera, corresponde a abarcar la medición del total de su área desde cualquier punto interior, obteniéndose que todo el cielo ocupa  $\Omega_0 = 4\pi \text{ sr}$ . De esta forma, la fracción de ambos astros respecto del total se podrá representar como

$$\frac{\Omega_L}{\Omega_0} \approx 5.74 \times 10^{-6}, \quad \frac{\Omega_S}{\Omega_0} \approx 5.74 \times 10^{-6}.$$

**2.** Se busca el diferencial de ángulo sólido para partículas dispersadas en un promedio  $\theta$  y rango angular  $d\theta$  viene como, en el caso particular en que  $\theta_1 = 5^\circ$  y que  $\theta_2 = 85^\circ$  para un mismo  $d\theta = 1$ . Esto resultará en que

$$d\Omega_1 = \sin \theta_1 d\theta d\phi \approx 0.087 d\phi, \quad d\Omega_2 = \sin \theta_2 d\theta d\phi \approx 0.996 d\phi,$$

de lo que se desprende que, para  $d\theta, d\phi$  fijos a distintos ángulos, a mayor ángulo se tiene mayor  $d\Omega$ .

**3.** El problema consiste en detectar los parámetros relevantes de la ecuación (II) y resolverla para obtener el total de partículas dispersadas. En primer lugar, el número  $N_{inc}$  de partículas incidentes es de

$$N_{inc} = 10^{10},$$

además, la densidad superficial  $n_{tar}$  de partículas en el blanco viene determinada como

$$n_{tar} = \frac{\rho \cdot d}{m} = \frac{(10.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) \cdot (1 \times 10^{-6} \text{ m})}{108 \cdot 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}} = \frac{175}{2988} \times 10^{24} \frac{1}{\text{m}^2},$$

donde se usó que la gravedad específica es una relación entre la densidad de una sustancia y la del agua, de forma que la gravedad específica de una sustancia es la densidad de ésta dividida por la densidad del agua ( $10^3 \text{ kg/m}^3$ ); del mismo modo, se usó que una unidad de masa atómica (u.m.a.) es la constante de masa molar  $M_u$  dividida el número de Avogadro  $N_A$ , resultando en  $1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .

Con la misma estrategia, la sección diferencial eficaz viene determinada como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 0.6 \frac{b}{sr} = \frac{3}{5} \times 10^{-28} \frac{m^2}{sr},$$

donde la relación entre *barns* y *metros* es  $1b = 10^{-28} m^2$ , resaltando que el término  $6.5MeV$  de energía enunciado del ejercicio ya que está incluido implícitamente en  $d\sigma/d\Omega$ . Del mismo modo, el ángulo sólido será

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{0.1 mm^2}{(1 cm)^2} sr = 10^{-3} sr.$$

Usando en la ecuación (II) todos los resultados obtenidos, se resuelve la cantidad de partículas dispersadas como

$$N_{sc} = N_{inc} n_{tar} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi) d\Omega = (10^{10}) \cdot \left( \frac{175}{2988} \times 10^{24} \frac{1}{m^2} \right) \cdot \left( \frac{3}{5} \times 10^{-28} \frac{m^2}{sr} \right) \cdot (10^{-3} sr) = \frac{8750}{249} \approx 35.14.$$

4. Haciendo uso de la ecuación (IV) es posible calcular el área eficaz de dispersión para  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  como

$$\begin{aligned} \sigma &= \iint \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \iint \left( \frac{kqQ}{4E \sin^2(\theta/2)} \right)^2 d\Omega = \left( \frac{kqQ}{4E} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{2\pi} \left( \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \right)^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = \dots \\ \sigma &= 2\pi \left( \frac{kqQ}{4E} \right)^2 \int_{\pi/2}^{2\pi} \left( \frac{2}{1 - \cos(\theta)} \right)^2 \sin(\theta) d\theta = 8\pi \left( \frac{kqQ}{4E} \right)^2 \int_0^1 \frac{du}{(1+u)^2} = 8\pi \left( \frac{kqQ}{4E} \right)^2 \left[ \frac{1}{1+u} \right]_0^1 = 4\pi \left( \frac{kqQ}{4E} \right)^2, \end{aligned}$$

usando este resultado en la ecuación (I) es posible calcular la probabilidad de que ocurra el scattering como

$$P(\theta \geq 90^\circ) = \frac{N_{sc}}{N_{inc}} = n_{tar} \cdot \sigma = \left( \frac{\rho d}{m} \right) \cdot 4\pi \left( \frac{kqQ}{4E} \right)^2 = \dots$$

usando los datos dados junto con que  $q = 2e$  y  $Q = 78e$  se obtiene finalmente que

$$\begin{aligned} P(\theta \geq 90^\circ) &= \left( \frac{(2.14 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(3 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{195 \cdot 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}} \right) \cdot 4\pi \left( \frac{2 \cdot 78 \cdot (8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}) \cdot (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{4 \cdot (7.8 \times 10^6 \cdot 1.6 \times 10^{-19} \text{ C})} \right)^2 = \dots \\ P(\theta \geq 90^\circ) &\approx 1.289 \times 10^{-4} \approx \frac{7999}{8000}, \end{aligned}$$

lo cual verifica la aproximación considera por Geiger y Mardsen de que 1 partícula en 8000 era reflejada.

5. Se busca estudiar la relación  $\theta(b)$  para cualquier fuerza central  $F(r)$  para el Scattering de Rutherford. Con este objetivo, se sabe que existe un potencial  $U(r)$  tal que  $F = -\nabla U$ , una partícula incidente con velocidad  $v_0$  y parámetro de impacto  $b$ , siendo ahora  $\chi = \psi$  el ángulo subtendido en la recta que une el blanco con el perihelio.

Aplicando las consideraciones de conservación del momento angular, se verificó anteriormente que

$$\theta = \pi - 2\chi,$$

además, usando la relación entre el ángulo  $\chi$  y su derivada  $\dot{\chi}$ , y aplicando cambio de variables  $dt \rightarrow dr$  se tiene

$$\chi = \int \dot{\chi} dt = \int \frac{\dot{\chi}}{\dot{r}} dr.$$

por otra parte, usando la conservación de la conservación del momento angular se obtiene  $\dot{\chi}$  como

$$\dot{\chi} = l/mr^2 = \frac{bv_0}{r^2},$$

mientras que la conservación de la energía mecánica total del sistema y del momento angular se obtiene  $\dot{r}$  como

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\chi}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{b^2v_0^2}{r^2}\right) + U(r) \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{v_0^2 - \frac{b^2v_0^2}{r^2} - \frac{2}{m}U(r)},$$

donde se eligió el signo positivo de  $\dot{r}$ . Usando los resultados para  $\theta, \chi, \dot{\chi}, \dot{r}$  junto con  $v_0^2 = 2E/m$  se llega a que

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{(b/r^2) dr}{\sqrt{1 - (b/r)^2 - U(r)/E}}.$$

6. Se tiene una partícula de energía  $E$  en un campo potencial  $U(r) = \gamma/r^2$ , usando el ejercicio anterior se llega a

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{(b/r^2) dr}{\sqrt{1 - (b/r)^2 - U(r)/E}} = \pi - 2b \int_{r_0}^{\infty} \frac{(1/r^2) dr}{\sqrt{1 - (b^2 + \gamma/E)/r^2}},$$

usando la conservación del momento angular y la conservación de la energía, para un estado inicial de la partícula con velocidad  $v_0$ , se puede reescribir el radio mínimo  $r_0$  de la hipérbola como

$$E = \frac{l^2}{2mr_0^2} + \frac{\gamma}{r_0^2} = \frac{(mbv_0)^2}{2mr_0^2} + \frac{\gamma}{r_0^2} = \frac{b^2E}{r_0^2} + \frac{\gamma}{r_0^2} \Rightarrow r_0^2 = b^2 + \gamma/E,$$

de lo que reemplazando en la integral inicial y luego haciendo un cambio de variables  $z = r_0/r$  se llega a que

$$\theta = \pi - 2b \int_{r_0}^{\infty} \frac{(1/r^2) dr}{\sqrt{1 - (r_0/r)^2}} = \pi - \frac{2b}{r_0} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \pi - \frac{2b}{r_0} [\arcsin z]_0^1 = \pi \left(1 - \frac{b}{r_0}\right),$$

lo que finalmente permite hallar la relación  $\theta(b) = \pi(1 - b/r_0)$  o, en forma equivalente,  $b(\theta) = r_0(1 - \theta/\pi)$ . Esto permite resolver la sección eficaz diferencial a partir de la ecuación (III), obteniéndose

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{r_0(1 - \theta/\pi)}{\sin \theta} \left| -\frac{r_0}{\pi} \right| = \dots = \frac{\gamma/E}{\theta \sin \theta} \frac{\pi - \theta}{2\pi - \theta}.$$