# Apunte de cuerpo rígido

Cátedra Solari

September 15, 2017

# 1 Sólido rígido y transformaciones ortogonales (rotaciones).

## 1.1 Definición y matrices ortogonales

Llamamos sólidos rígidos a los cuerpos no deformables, es decir aquellos en que tanto las distancias como los ángulos entre las distintas partes del cuerpo no puede cambiar en el tiempo. La distribución de masas puede ser discreta o continua, en el segundo caso nos referimos a cada elemento diferencial de masas, $dm$, como a una parte del cuerpo.

Si consideramos un sistema de referencia inercial, $S$, con ejes en las direcciones $\mathbf{e1}$, $\mathbf{e2}$, $\mathbf{e3}$ y un sistema de referencia fijo al cuerpo, $S'$, con ejes en las direcciones $\mathbf{e1}'$, $\mathbf{e2}'$, $\mathbf{e3}'$, la posición de cada parte del sólido rígido estará dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{r} \tag{1}$$

donde $\mathbf{x}$ es la posición de la parte del cuerpo en el sistema $S$, $\mathbf{X}$ es el vector que va del origen de coordenadas de $S$ a $S'$ y $\mathbf{r}$ el vector que va desde el origen $S'$ a la posición de la masa, siempre descripto en el sistema $S$, Figura (1).

Nuestro interés es encontrar la energía cinética del cuerpo rígido para poder hallar las ecuaciones de movimiento por el método de Lagrange o el de Hamilton.

En primer lugar consideramos el movimiento posible con respecto al origen de coordenadas de $S'$. Descripto en el sistema de referencia fijo al cuerpo las distancias y ángulos de los vectores que conectan distintos elementos de masas del sólido son simplemente constantes en el tiempo por la naturaleza

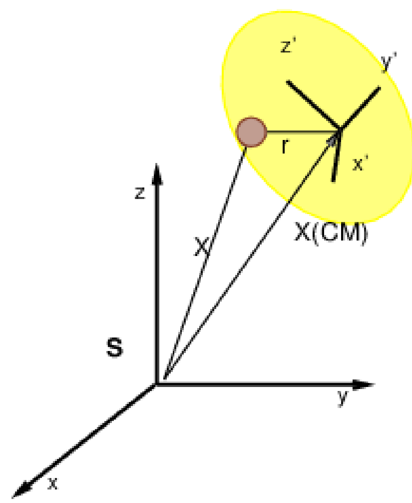


Figure 1: Sistemas de referencia. $S$ inercial, $S'$ fijo al cuerpo.

misma del sólido rígido. Los vectores $\mathbf{r}$ sin embargo no son constantes, pero vectores asociados con distintos elementos deben variar en forma coordinada de tal forma de mantener tanto las distancias como los ángulos relativos constantes. Por lo tanto se deben cumplir las siguientes relaciones entre vectores $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ asociados a distintas masas $dm_1$ y $dm_2$

$$\begin{aligned} |\mathbf{r_i}|^2 &= \text{constante, distancias} && (2) \\ \mathbf{r_1} \cdot \mathbf{r_2} &= \text{constante, ángulos} && (3) \\ \text{si } \mathbf{r_1} &= \lambda \mathbf{r_2} \text{ al tiempo } t,\ \mathbf{r_1} = \lambda \mathbf{r_2} \text{ para todo tiempo} && (4) \\ \text{si } \mathbf{r_1} &= \mathbf{r_2} \pm \mathbf{r_3} \text{ al tiempo } t,\ \mathbf{r_1} = \mathbf{r_2} \pm \mathbf{r_3} \text{ para todo tiempo} && (5) \end{aligned}$$

Las dos últimas relaciones nos dicen que la transformación entre los vectores $\mathbf{x}$ entre tiempos diferentes es lineal, llamaremos a la transformación $\Re$. Cuando la misma es expresada en términos de un sistema de coordenadas se representa simplemente por una matriz de transformación que llamaremos $\mathbf{M}$.

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \Re \mathbf{r_0} \qquad (6)$$

donde $\mathbf{r_0}$ no depende del tiempo.

Siendo $\mathbf{r_0}$ constante en el tiempo cabe preguntarse cual es la relación entre $\mathbf{r_0}$ y las coordenadas de $\mathbf{r}$ en el sistema fijo al sólido, $S'$. Para simplificar el estudio podemos hacer coincidir al tiempo cero las direcciones de los sistemas de referencia. A $t = 0$ es $\Re = \mathbf{I}$ (la identidad) y $\mathbf{r_0}$ coincide con $\mathbf{r}'$; como ambos vectores no cambian en el tiempo coincidirán a todo tiempo, finalmente si las direcciones de los versores de $S$ y $S'$ no son coincidentes en $t = 0$ se puede escribir $\mathbf{r_0} = \Re(0)\mathbf{r}'$ donde $\Re(0)$ es la rotación de $S'$ con respecto a $S$ y puede considerarse como la condición inicial de la matriz de rotación $\mathbf{M}$. Podemos escribir simplemente

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \Re\mathbf{r}' \tag{7}$$

La matriz $\mathbf{M^T}$ asociada a $\Re$ transforma la expresión de los vectores en $S$ a la expresión propia en $S'$. Debe notarse que usada como trasnformación de coordenadas la relación es exactamente la inversa que transformando vectores. $\Re$ rota vetores (y por tanto una terna fija al cuerpo) de la orientación $S$ a $S'$. $\mathbf{M}$ aplicado a una terna de números asociada a un vector en $S$ da la terna asociada al vector rotado siempre expresada en término de las coordenadas de $S$; mientras que las coordenadas del vector inicial expresadas como una terna en $S$ se expresan como una terna en $S'$ aplicando $\mathbf{M^T}$.

Es decir, que hay que tener cuidado en distinguir dos aplicaciones de $\mathbf{M}$, la primera rota vectores expresados en base a $S$ y la otra aplicación representa un cambio de terna que se efectúa usando la matriz transpuesta

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\,\mathbf{y}' \tag{8}$$

es la expresión para el cambio de coordenadas.

Volviendo a las características de la matriz $\mathbf{M}$ surge de (2) y (3) que

$$\mathbf{M^T M} = \mathbf{I} \tag{9}$$

Igualando elementos de matriz a ambos lados de la ecuación se imponen condiciones a la matriz $\mathbf{M}$, el numero de condiciones sería 9 en total, pero 3 de ellas se cumplen automáticamente al ser la matriz $\mathbf{M^T M}$ simétrica ($(\mathbf{M^T M})^\mathbf{T} = \mathbf{M^T M}$). Quedan de esta forma tres grados de libertad asociados con la matriz *ortogonal* $\mathbf{M}$ que sumados a los tres grados de libertad asociados a la posición del origen de la terna fija al cuerpo dan un total de 6 grados de libertad.

Las matrices de rotación tienen otras propiedades importantes que resumimos

$$\det(\mathbf{M}) = \pm 1 \tag{10}$$

$$\text{si } \mathbf{M_1} \text{ y } \mathbf{M_2} \text{ son ortogonales, } \mathbf{M_1 M_2} \text{ es ortogonal} \tag{11}$$

## 1.2 Ángulos de Euler

Una de las formas de parametrizar a las matrices de rotaciones es por medio de los ángulos de Euler. Se trata de tres rotaciones sucesivas alrededor de tres ejes distintos. Llamaremos a los sistemas $S, S', S''$, las rotaciones se efectúan en forma sucesiva y son: 1. rótese el cuerpo en un ángulo $\phi$ alrededor del eje $\mathbf{e_3}$ de $S$, $\Re_3(\phi)$. 2. Rótese el cuerpo en un ángulo $\theta$ alrededor del eje $\mathbf{e'_1}$ de $S'$, $\Re_{1'}(\theta)$. 3. Rótese el cuerpo alrededor de un ángulo $\psi$ alrededor del eje $\mathbf{e''_3}$, $\Re_{3''}(\psi)$, Figura (2).

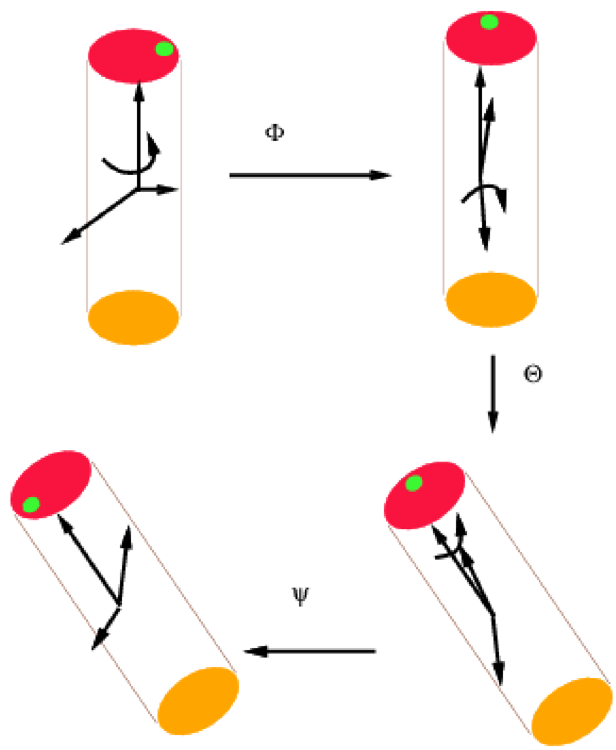


Figure 2: Ángulos de Euler.

La rotación total queda entonces expresada en la forma

$$\Re = \Re_{3''}(\psi)\Re_{1'}(\theta)\Re_3(\phi) \tag{12}$$

La matriz de la rotación $\Re_3(\phi)$ es la mas simple de expresar ya que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_3(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && (13) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \phi^n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n /n! && (14) \\
&= \exp(\mathbf{J_3}\phi) && (15) \\
\text{donde } \mathbf{J_3} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (16)
\end{aligned}
$$

Permutaciones cíclicas de los índices permiten expresar las rotaciones alrededor de los restantes ejes de $S$. Mas aún, las rotaciones alrededor de un eje arbitrario en la dirección $y = (y_1, y_2, y_3)$ , $(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1)$, se pueden escribir como

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M_y}(\gamma) &= \exp(\gamma \mathbf{J_y}) && (17) \\
\text{donde } \mathbf{J_y} &= y_1 \mathbf{J_1} + y_2 \mathbf{J_2} + y_3 \mathbf{J_3} && (18)
\end{aligned}
$$

Armados de esta relación matemática queremos expresar las rotaciones de Euler (12) en términos de matrices conocidas. La rotación en $\phi$ ya la conocemos, falta averiguar las restantes expresiones. Escrita en $S'$ la rotación $\Re_{1'}(\theta)$ es simplemente

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{M}_{1'}(\theta))' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} && (19) \\
&= \exp(\theta \mathbf{J_1}) && (20)
\end{aligned}
$$

Para expresarla en términos del sistema $S$ procedemos así: reescribimos los vectores en el sistema $S'$ aplicamos $\Re_{1'}(\theta)$ y transformamos nuevamente al sistema $S$. La transformación entre $S$ y $S'$ viene dada por la matriz $\mathbf{M}_3(\phi)$ por lo que tenemos en símbolos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \mathbf{M}_3(\phi)\mathbf{y}' && (21) \\
\mathbf{y}' &= (\mathbf{M}_3(\phi))^T \mathbf{y} && (22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_{1'}(\theta)\mathbf{y} &= \mathbf{M}_{1'}(\theta)[\mathbf{M}_3(\phi)(\mathbf{M}_3(\phi))^T]\mathbf{y} \\
&= [\mathbf{M}_{1'}(\theta)\mathbf{M}_3(\phi)]\mathbf{y}'\text{resultado aún en } S \qquad (23)\\
(\mathbf{M}_3(\phi))^T\mathbf{M}_{1'}(\theta)\mathbf{y} &= (\mathbf{M}_3(\phi))^T\mathbf{M}_{1'}(\theta)\mathbf{M}_3(\phi)\mathbf{y}'\text{resultado ahora en } S' \qquad (24)\\
(\mathbf{M}_{1'}(\theta))' &= (\mathbf{M}_3(\phi))^T\mathbf{M}_{1'}(\theta)\mathbf{M}_3(\phi) \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Una vez conocida la expresión de $\mathbf{M}_{1'}(\theta)$ en $S'$ podemos escribir la expresión en $S$ invirtiendo la ecuación (25). Finalmente, componiendo las rotaciones en $\phi$ y en $\theta$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_{1'}(\theta)\mathbf{M}_3(\phi) &= [\mathbf{M}_3(\phi)\exp(\theta\mathbf{J_1})(\mathbf{M}_3(\phi))^T]\mathbf{M}_3(\phi) \qquad (26)\\
&= \mathbf{M}_3(\phi)\exp(\theta\mathbf{J_1}) \qquad (27)\\
&= \exp(\phi\mathbf{J_3})\exp(\theta\mathbf{J_1}) \qquad (28)
\end{aligned}
$$

**Este resultado es por demás llamativo. El orden en el que aparecen las matrices es exactamente el inverso al orden en que planteamos las operaciones!!!!!!** Del mismo modo se llega a que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \mathbf{M}_{3''}(\psi)\mathbf{M}_{1'}(\theta)\mathbf{M}_3(\phi) \qquad (29)\\
&= \exp(\phi\mathbf{J_3})\exp(\theta\mathbf{J_1})\exp(\psi\mathbf{J_3}) \qquad (30)\\
&= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (31)\\
&= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi-\cos\theta\sin\phi\sin\psi & -\sin\psi\cos\phi-\cos\theta\sin\phi\cos\psi & \sin\theta\sin\phi \\ \cos\psi\sin\phi+\cos\theta\cos\phi\sin\psi & -\sin\psi\sin\phi+\cos\theta\cos\phi\cos\psi & -\sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (32)
\end{aligned}
$$

## 1.3 Rotaciones infinitesimales

Para calcular la energía cinética necesitamos conocer las velocidades de los cuerpos. En particular necesitamos conocer cuanto se rota en un intervalo de tiempo infinitesimal $dt$ ya que

$$d\mathbf{M}/dt = (\mathbf{M}(t+dt)-\mathbf{M}(t))/dt \qquad (33)$$

La rotación $\mathbf{M}(t+dt)$ puede considerarse en dos pasos, en el primero se efectúa la rotación $\mathbf{M}(t)$ y seguida a ella una rotación infinitesimal que escribimos

$$\delta\mathbf{M} = (\mathbf{I}+dt\mathbf{J}) \qquad (34)$$

De tal manera que la rotación al tiempo $t + dt$ se expresa como

$$\mathbf{M}(t + dt) = \delta\mathbf{M}\,\mathbf{M}(t) = (\mathbf{I} + dt\mathbf{J})\mathbf{M}(t) \tag{35}$$

La matriz $\mathbf{J}$ no puede ser arbitraria ya que toda rotación cumple las condiciones de ortogonalidad, $\mathbf{M^T M} = \mathbf{I}$ y por lo tanto debe ser

$$\begin{aligned} d\mathbf{I}/dt &= (d\mathbf{M^T}/dt)\,\mathbf{M} + \mathbf{M^T}d\mathbf{M}/dt = \mathbf{0} && (36)\\ &= \mathbf{M^T J^T M} + \mathbf{M^T J M} && (37)\\ \mathbf{M^T J^T M} &= -\mathbf{M^T J M} && (38)\\ \mathbf{J^T} &= -\mathbf{J} && (39) \end{aligned}$$

La última expresión indica que la matriz $\mathbf{J}$ es antisimétrica. Toda matriz antisimétrica tiene solo tres elementos independientes ya que los elementos diagonales deben ser 0 y los elementos debajo de la diagonal principal deben valer $-1$ por los elementos sobre la diagonal. La matrices $\mathbf{J}_1, \mathbf{J_2}, \mathbf{J_3}$ sirven como base a las matrices antisimétricas. Las componentes de $\mathbf{J_i}$ se correson-den con el tensor de Levi-Civita

$$\begin{aligned} \{\mathbf{J}_i\}_{jk} &= \epsilon_{ijk} \\ \epsilon_{123} &= 1 \\ \epsilon_{ijk} &= -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = \epsilon_{kji} \end{aligned}$$

El tensor de Levi-Civita es muy útil para escribir productos vectoriales ya que

$$\{a \times b\}_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

y permite demostrar con facilidad relaciones como el producto triple vectorial

$$\{a \times (b \times c)\}_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_j \{b \times c\}_k = \sum_{jk}\sum_{lm} \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m$$

que luego de una permutación de los índices en el segundo tensor resulta

$$\{a \times (b \times c)\}_i = \sum_{jk}\sum_{lm} (\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}) a_j b_l c_m$$

Los términos no nulos del producto de tensores que tienen un índice en coincidencia son 1 si $i = l$, $j = m$ y $-1$ si $i = m$, $j = l$ es decir $\sum_k (\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}) = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})$

$$\{a \times (b \times c)\}_i = \sum_{j}\sum_{lm} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, a_j b_l c_m = b_i \sum_j a_j c_j - c_i \sum_j a_j b_j = \{b(a \cdot c) - c(a \cdot b)\}$$

que es la famosa relación baca-caballo. Para nuestros cálculos la siguiente también es importante

$$(a \times b) \cdot (a \times b) = \sum_i \{a \times b\}_i^2 = \sum_{ijklm} \epsilon_{ijk} a_j b_k \epsilon_{ilm} a_l b_m$$

usando la relación previamente hallada

$$|(a \times b)|^2 = \sum_{jklm} (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\, a_j b_k a_l b_m = |a|^2|b|^2 - |a \cdot b|^2 \tag{40}$$

Todo $\mathbf{J}$ se escribe como

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{3} w_i \mathbf{J}_i \tag{41}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{42}$$

Obsérvese que por lo expresado en la ecuación (18) la rotación infinitesimal $\delta\mathbf{M}$ resulta no ser otra cosa que una rotación infinitesimal en la dirección del vector $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ y por otra parte se verifica que

$$\mathbf{J}\mathbf{y} = \mathbf{w} \times \mathbf{y} \tag{43}$$

$$(\mathbf{I} + dt\mathbf{J})y = \mathbf{y} + dt\mathbf{w} \times \mathbf{y} \tag{44}$$

$\mathbf{w}$ resulta así una velocidad angular tal como se la expresa en la terna inercial $S$.

Para transformar esta última expresión a la terna $S'$ podemos proceder así: 1. multiplicamos por $\mathbf{M^T}$ de acuerdo a la expresión (8), 2. expresamos $\mathbf{y}$ en función de $\mathbf{y}'$ 3. identificamos la matriz $\mathbf{J}'$ como aquella que genera la rotación infinitesimal de los vectores expresados en el sistema $S'$

$$\mathbf{M^T}(\mathbf{I} + dt\mathbf{J})\mathbf{y} = \mathbf{M^T}(\mathbf{I} + dt\mathbf{J})(\mathbf{M}\mathbf{M^T})\mathbf{y} \tag{45}$$

$$= \mathbf{M^T}(\mathbf{I} + dt\mathbf{J})\mathbf{M}\mathbf{y}' \tag{46}$$

$$= (\mathbf{I} + dt\mathbf{J}')\mathbf{y}' \tag{47}$$

donde

$$\mathbf{J}' = \mathbf{M^T}\mathbf{J}\mathbf{M} \tag{48}$$

La matriz $\mathbf{J}'$ es igualmente antisimétrica y podemos expresarla como

$$\mathbf{J}' = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

El vector $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ es el vector velocidad angular expresado en el sistema de coordenadas fijo al cuerpo.

Finalmente la derivada respecto del tiempo de la matriz de rotación será

$$d\mathbf{M}/dt = \mathbf{JM} = \mathbf{MJ}'\mathbf{M^T M} = \mathbf{MJ}' \tag{50}$$

De esta relación se deduce con facilidad que

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \times \mathbf{r} &= \mathbf{w} \times \mathbf{Mr}' \\ &= \mathbf{JMr}' \\ &= \mathbf{MJ}'\mathbf{r}' \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}') \end{aligned} \tag{51}$$

de esta relación haremos uso en la discusión de sistemas no inerciales.

Nota: las matrices $\mathbf{J_i}$ forman una base ortogonal usando el producto escalar

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = Tr(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{B}) = \sum_{i,j=1}^{3} (\mathbf{A}_{ji} \mathbf{B}_{ji}) \tag{52}$$

se tiene

$$\delta_{\mathbf{ij}} = (1/2) \sum_{k,l=1}^{3} (\mathbf{J_i}_{lk} \mathbf{J_j}_{lk}) \tag{53}$$

la relación de ortogonalidad.

# 2 Energía Cinética y tensor de inercia

## 2.1 Energía Cinética

Nuestro objetivo inicial era encontrar la energía cinética, $T$, del cuerpo rígido. La energía total será la suma de las energías de cada una de las partes. Considerando una distribución continua de masas la suma se transforma en integral (notación $\dot{} = d/dt$)

$$T = (1/2) \int_{todalamasa} |\dot{\mathbf{x}}|^2 dm \tag{54}$$

que dada la expresión (7) se escribe

$$T = (1/2)\int_{todalamasa} |\dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{M}}\mathbf{r}'|^2 dm(r') \tag{55}$$

Si el sistema fijo al cuerpo tiene el origen en el centro de masas del cuerpo la energía cinética se separa en dos contribuciones, una proveniente del centro de masas y la segunda del movimiento del cuerpo en el sistema asociado con el centro de masas (las rotaciones en este caso). De ahora en adelante consideraremos a $\mathbf{X}$ como el vector que va del origen del sistema inercial $S$ al centro de masas origen del sistema fijo al cuerpo $S'$. De esta manera tenemos

$$T = (1/2)m|\dot{\mathbf{X}}|^2 + (1/2)\int_{todalamasa} |\dot{\mathbf{M}}\mathbf{r}'|^2 dm(r') \tag{56}$$

$$T = (1/2)m|\dot{\mathbf{X}}|^2 + (1/2)\int_{volumen} |\dot{\mathbf{M}}\mathbf{r}'|^2 \rho(r'_1, r'_2, r'_3) dr'_1 dr'_2 dr'_3 \tag{57}$$

donde $m$ es la masa total del cuerpo y $\rho(r'_1, r'_2, r'_3)$ la densidad del mismo.

Observamos que aquí ocurre la expresión

$$|\dot{\mathbf{M}}\mathbf{r}'|^2 = |\mathbf{M}\mathbf{J}'\mathbf{r}'|^2 = |\mathbf{J}'\mathbf{r}'|^2 = |(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}')|^2 = \left(\Omega^2|\mathbf{r}'|^2 - (\Omega \cdot \mathbf{r}')^2\right) \tag{58}$$

el primer paso por (50), el segundo por ser $\mathbf{M}$ ortogonal, el tercer paso por (51) y el cuarto por (40)

Por el momento nos interesa trabajar la parte de rotaciones ya que la energía del centro de masa ya está expresada en una forma conveniente.

Dado que la matriz de rotación es una para todos los elementos del cuerpo no depende de la posición. Expresando el cuadrado de la velocidad en términos de componentes se tiene

$$\begin{aligned} T &= (1/2)m|\dot{\mathbf{X}}|^2 + (1/2)\int_{volumen} \sum_{i,j,k=1}^{3} ((\dot{\mathbf{M}}_{ij}\mathbf{r}'_j)(\dot{\mathbf{M}}_{ik}\mathbf{r}'_k))\rho(r'_1, r'_2, r'_3) dr'_1 dr'_2 dr'_3 && (59) \\ &= (1/2)m|\dot{\mathbf{X}}|^2 + (1/2)\sum_{i,j,k=1}^{3} \{\dot{\mathbf{M}}_{ij}\dot{\mathbf{M}}_{ik} \int_{volumen} [(r'_j r'_k)\rho(r'_1, r'_2, r'_3)] dr'_1 dr'_2 dr'_3\} && (60) \end{aligned}$$

Si ahora definimos el **tensor de inercia**, $\Im$, como

$$\Im_{jk} = \int_{volumen} [(r'_j r'_k)\rho(r'_1, r'_2, r'_3)] dr'_1 dr'_2 dr'_3 \tag{61}$$

la energía cinética de rotación se escribe como

$$
\begin{aligned}
T_R &= \sum_{i,j,k=1}^{3} (\dot{\mathbf{M}}_{ij}\dot{\mathbf{M}}_{ik}\Im_{jk}) &(62)\\
&= \sum_{i=1}^{3} (\dot{\mathbf{M}}\Im\dot{\mathbf{M}}^T)_{ii} &(63)\\
&= \mathrm{Tr}(\dot{\mathbf{M}}\Im\dot{\mathbf{M}}^T) &(64)
\end{aligned}
$$

(la traza, Tr, de una matriz es la suma de los elementos diagonales de la misma).

Si reemplazamos en esta última expresión la forma que encontramos para la derivada temporal de la matriz de rotación (50) encontramos

$$
\begin{aligned}
T_R &= \mathrm{Tr}(\mathbf{M}\,\mathbf{J}'\,\Im\,(\mathbf{M}\,\mathbf{J}')^T) &(65)\\
&= \mathrm{Tr}(\mathbf{J}'^T\,\mathbf{J}'\Im) &(66)
\end{aligned}
$$

recordamos aquí que $\mathbf{J}'$ estaba directamente relacionada con la velocidad angular expresada en el sistema fijo al cuerpo. La expresión de la energía cinética rotacional resulta, utilizando (58)

$$T_R = \frac{1}{2}\int_{volumen} \sum_{i,j,k=1}^{3} \left(\Omega^2|\mathbf{r}'|^2 - (\Omega\cdot\mathbf{r}')^2\right)\rho(\mathbf{r}')d^3r' = \frac{1}{2}\Omega\cdot\mathbf{In}\Omega$$

donde los elementos de matriz

$$\{\mathbf{In}\}_{ij} = \int_{volumen} \sum_{i,j,k=1}^{3} \left(|\mathbf{r}'|^2\delta_{ij} - r'_i r'_j\right)\rho(\mathbf{r}')d^3r'$$

definen la matriz de inercia.

## 2.2 Ejes principales de inercia y momento de inercia

El tensor de inercia, $\Im$, es una matriz simétrica y definida positiva según se verifica inmediatamente de su definición

$$
\begin{aligned}
\Im_{jk} &= \int_{volumen} [(r'_j r'_k)\rho(r'_1, r'_2, r'_3)]dr'_1 dr'_2 dr'_3 &(67)\\
&= \int_{volumen} [(r'_k r'_j)\rho(r'_1, r'_2, r'_3)]dr'_1 dr'_2 dr'_3 &(68)\\
&= \Im_{kj} \text{ simetría} &(69)
\end{aligned}
$$

$$\sum_{i,j=1}^{3}(v_i \Im_{ij} v_j) = \int_{volumen} [\sum_{i,j=1}^{3}(v_i r'_i r'_j v_j)\rho(r'_1, r'_2, r'_3)] dr'_1 dr'_2 dr'_3 \tag{70}$$

$$= \int_{volumen} [(\sum_{i=1}^{3}(v_i r'_i)^2)\rho(r'_1, r'_2, r'_3)] dr'_1 dr'_2 dr'_3 \; > \; 0$$

$$\text{para todo vector } \mathbf{v} \tag{71}$$

Toda matriz simétrica se puede llevar a la forma diagonal y siendo definida positiva todos sus autovalores son positivos.

Los autovalores son ceros del polinomio característico $P(\lambda)$

$$P(\lambda) = \det(\Im - \lambda \mathbf{I}) \tag{72}$$

siendo los autovectores asociados los ejes principales de inercia. Es conveniente entonces hacer coincidir los ejes del sistema fijo al cuerpo, $S'$, con los ejes principales de inercia logrando que el tensor de inercia se escriba como

$$\Im = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{73}$$

siendo los $P(\lambda_i) = 0$ y $\lambda_i > 0$ para todas las direcciones.

Con este resultado podemos completar la forma de la energía cinética. Retomando de la ecuación (66) escribimos

$$\begin{aligned} T_R &= (1/2)\mathrm{Tr}(\mathbf{J}\Im\mathbf{J^T}) && (74) \\ &= (1/2)\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}\right) && (75) \\ &= (1/2)((\lambda_2 + \lambda_3)\Omega_1^2 + (\lambda_3 + \lambda_1)\Omega_2^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\Omega_3^2) && (76) \end{aligned}$$

Se llaman momentos de inercia a las cantidades

$$I_1 = \lambda_2 + \lambda_3 \tag{77}$$

$$I_2 = \lambda_3 + \lambda_1 \tag{78}$$

$$I_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \tag{79}$$

En función de ellas escribimos la energía cinética del cuerpo rígido como

$$T = (1/2)m|\dot{\mathbf{X}}|^2 + (1/2)(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2) \tag{80}$$

## 2.3 Velocidad angular y ángulos de Euler

La relación entre la velocidad angular y las derivadas de los ángulos de Euler requiere de una cuenta tediosa pero simple. Basta con derivar la expresión de $\mathbf{M}$ en función de los ángulos de Euler e identificar la matriz $J'$, en términos de la base $\mathbf{J_i}$ se tiene

$$\Omega_{\mathbf{i}} = (1/2)\mathrm{Tr}(\mathbf{M^T}\dot{\mathbf{M}}\mathbf{J_i^T}) \tag{81}$$

el resultado de esta cuenta es

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi && (82)\\
\Omega_2 &= -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi && (83)\\
\Omega_3 &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} && (84)
\end{aligned}$$

# 3 Fuerzas de Inercia de Coriolis y Centrífuga

Utilizando los conocimientos sobre rotaciones adquiridos en la discusión de movimiento del cuerpo rígido podemos reescribir las ecuaciones de Newton en un sistema de referencia que rota de manera no uniforme (en principio). Es decir que queremos expresar la ecuación

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \tag{85}$$

del sistema de referencia inercial $S$ al sistema no inercial que rota $S'$. La relación entre los vectores de un sistema y otro viene dada por una matriz de rotación $\mathbf{M}$ y su inversa

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{M}\mathbf{x}' && (86)\\
\mathbf{x}' &= \mathbf{M^T}\mathbf{x} && (87)
\end{aligned}$$

Donde tanto $\mathbf{M}$ como $x'$ pueden depender del tiempo.

El problema consiste simplemente en hallar la aceleración en términos de las variables de $S'$. Para esto recordamos (34) y (51), escribimos

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{M}}\mathbf{x}' + \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}' && (88)\\
&= \mathbf{M}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{x}' + \dot{\mathbf{x}}') && (89)
\end{aligned}$$

que es la expresión de la velocidad. La aceleración es entonces

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{x}' + \dot{\mathbf{x}}') + \mathbf{M}(\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{x}' + \mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{x}}' + \ddot{\mathbf{x}}') && (90)\\
&= \mathbf{M}(\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{x}') + 2\mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{x}}' + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{x}' + \ddot{\mathbf{x}}') && (91)
\end{aligned}$$

Transformando la expresión de la ley de Newton al sistema $S'$ (multiplicando por $M^T$) logramos

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{f} - (\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{x}') + 2\mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{x}}' + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{x}' + \ddot{\mathbf{x}}') \tag{92}$$

donde $\mathbf{f} = \mathbf{M^T F}$.

Los diferentes términos de esta fórmula tienen nombres. El término cuadrado en la velocidad angular es la fuerza centrífuga, el término lineal en la velocidad angular es la fuerza de Coriolis, mientras que el término proporcional a la aceleración angular es llamado fuerza inercial ya que está presente solo en los sistemas con velocidad angular variable.