Ejercicios avanzados sobre cuerpo rígido y rotaciones

21 de septiembre de 2017

El objeto de estos ejercicios es desarrollar un poco la capacidad de producción teórica, el manejo conceptual y la familiaridad con las descripciones de las rotaciones.

Las preguntas están diseminadas por el texto.

Notación: ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-Civita, R es una matriz de rotación.

Conocemos una forma de construir R con los ángulos de Euler. La propuesta es estudiar tres formas más y deducir las ecuaciones de Lagrange en estas formas. Es aconsejable que el álgebra la maneje un sistema de manipulación simbólica como Maxima (y su interfase visual wxmaxima) (es libre y gratuito).

Advertencia: estos ejercicios no son meramente instrumentales como los habituales ejercicios de las prácticas.

Visualización Tomo un cuerpo rígido (por ejemplo el teléfono celular). Elijo una recta en relación a este. (Podría ser la diagonal de la pantalla, o la recta perpendicular a la pantalla que pasa por el centro de la misma, puede ser cualquier otra pero son mas difíciles de visualizar). Lo roto primero en cualquier dirección. Esta es mi rotación R_1. La rotación está determinada por el cambio de dirección de la recta previamente determinada. Realizo una segunda rotación, R_2, que usa como eje la recta determinada previamente. Memorizo la posición el cuerpo. En el siguiente paso voy a intentar hacer solo esta segunda rotación como una composición de otros movimientos que me den el mismo resultado. Procedo así: deshago la rotación R_1, roto sobre el eje previamente determinado respecto del celular, vuelvo a rotar con R_1para lograr la posición buscada.

Describa simbolicamente la equivalencia de rotaciones que parece haber encontrado. Esta es una conjetura. Describa claramente, sin ambigüedades, la tesis a demostrar. Intente demostrarla. Si no sale, puede seguir con los siguientes ejercicios que a lo mejor le sugieren ideas, y a lo mejor no. Regrese aquí tantas veces como sea necesario.

Coclases Consideremos un vector no nulo, v y $R \in SO_3$ un elemento cualquiera del grupo de las rotaciones. Consideremos el subgrupo de rotaciones que deja invariante a v, es decir que son rotaciones en el plano perpendicular a v. Este conjunto forma un subgrupo de las rotaciones que es unidimensional y lo llamamos SO_1. Sea $O \in SO_1$. La acción de R sobre un único vector, v o determina totalmente al elemento del grupo ya que $ROv = Rv$, puesto que $Ov = v$ por la condición de invariancia. Llamamos co-clase a izquierda del subgrupo SO_1asociado con v al conjunto que tiene por elementos a todos los R tal que $Rv = R'v$, esto establece una relación de clase (equivalencia) entre estos elementos por lo que la llamamos coclase. Tenemos que estos elementos se agrupan según la acción que tengan sobre el vector v y ésta acción consiste en dejarlo de igual módulo y cambiarle la orientación, por lo que podemos identificarlos por la posición de la punta del vector en una esfera. Definamos la dirección $\hat{z}$ como la dirección de v y la punta del vector se identifica con $(\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta))$. Este vector se obtiene por la acción de la matríz

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Verifique que la última columna tiene el vector deseado, imagen de $\hat{z}$, cada fila es de módulo 1, el determinante es 1 y si nos esforzamos la transpuesta es su inversa.

Puesto que cada rotación se identifica de manera única con valores de (θ, ϕ) mediante la acción sobre $\hat{z}$, resulta que toda rotación se escribe como $R = MR_3$donde $R_3 \in SO_1$ deja invariante a v.

¿Cuál es la forma general de una rotación que resulta de éste análisis? ¿Cómo se relaciona con los ángulos de Euler? ¿Cómo puede visualizar la rotación total resultante para un cuerpo?

Más coclases Las coclases a derecha tienen una arbitrariedad que su nombre denuncia. Podríamos representar al vector como una matriz fila y operar con las rotaciones izquierda. Les toca hacerlos solos. **¿Qué representación obtengo? Obtenga la velocidad en ambas presentaciones. ¿Qué relación guardan las dos velocidades obtenidas?**

Otra representación más. Habíamos dicho que los elementos de una matriz antisimétrica se escriben como:

$$A_{jk} = \sum_i \alpha_i \epsilon_{ijk}$$

Comprobar que es antisimétrica es trivial, queda en sus manos.

1. **Escriba la matriz A como matríz.**

2. **Encuentre $A^2 = AA$ el producto entendido como producto de matrices. ¿Es esta matríz simétrica o antisimétrica o ninguna de las dos cosas?**

3. **Deduzca por inducción que las potencias pares A^n son de un tipo y las impares de otro (a esta altura el tipo lo encontró en el paso anterior).**

4. $R = \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ **es la matriz de rotación.**

5. **Identifique lo que simboliza A^0.**

6. **Descomponga R en contribuciones pares e impares y sume identificando las series que le quedan. (Puede que le simplifique la vida considerar primero que $\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i)^2 = 1$)**

Esta forma de parametrizar es menos arbitraria que las anteriores, no privilegia dirección alguna ni orden de las operaciones. Es posible que lleve a cuentas más fáciles. ¿Se anima a obtener la velocidad angular en función de $\dot{\alpha}_i$? (Advierto que no hice la cuenta y puede ser tediosa!!!) Esta parametrización no tiene un correlato con una intuición-sensible y por tanto dificulta "ver" los resultados. ¿Cuál es el cambio de coordenadas que relaciona a estas coordenadas con las de Euler?

Esta forma de encarar el tema permite abordar de igual forma la parametrización de grupos continuos menos intuitivos como el grupo de Poincaré-Lorentz y muchos otros.