• término potencial:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_0^{t_c} \sin\left(\frac{n\pi t}{t_c}\right) dt}_{} = \frac{t_c}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right)\Big|_0^{t_c} = \frac{-t_c}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] \begin{cases} \frac{+2t_c}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

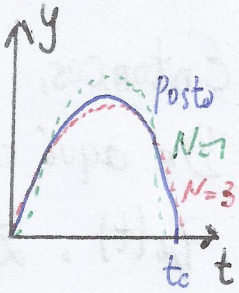
Entonces: $$\boxed{S = \frac{m}{4}\frac{\pi^2}{t_c}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^2 - 2mg\frac{t_c}{\pi}\sum_{n\ \text{impar}} a_n \frac{1}{n}}$$

b) Buscamos los a_n que hacen S estacionaria

• $$\left.\frac{\partial S}{\partial a_n}\right|_{n\ \text{impar}} = \frac{m}{4}\frac{\pi^2}{t_c} 2 a_n^* n^2 - mg\frac{2t_c}{\pi}\frac{1}{n} = 0 \quad \Big\} \quad \boxed{a_n^* = \frac{4t_c^2 g}{\pi^3 n^3}}\ n\ \text{impar}$$

• $$\left.\frac{\partial S}{\partial a_n}\right|_{n\ \text{par}} = \frac{m\pi^2}{4t_c} 2 a_n^* n^2 = 0 \longrightarrow \boxed{a_n^* = 0},\ n\ \text{par}$$

tenemos entonces, finalmente: $$\boxed{y(t) = \sum_{n\ \text{impar}} \frac{4t_c^2 g}{\pi^3 n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{t_c} t\right)}$$



* Variación con vínculos Auxiliares [Lanczos § 2-12]

Volvamos al problema de variar la acción: $S[q_\mu(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_\mu, \dot{q}_\mu, t)\, dt$

Pero ahora las n coord. generalizadas $\{q_\mu\}_{\mu=1..n}$ no son independientes, sino que tienen m vínculos holónomos $f_k(q_\mu, t) = 0$ $\longrightarrow$ se pueden tomar $n-m$ coord. independientes y trabajar como siempre, pero la eliminación es trabajosa y artificial

• Método de multiplicadores de Lagrange:

Podemos variar cada vínculo: $\delta f_k = \frac{\partial f_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial q_n}\delta q_n \overset{\text{ya eran } = 0}{=} 0$

Multiplicamos a c/u por un factor λ_k -a determinar- e integramos en el tiempo: $\int_{t_1}^{t_2} \lambda_k \delta f_k\, dt = 0$ Paso clave: en lugar de plantear $\delta S = 0$, planteamos:

$$\delta S' = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \lambda_1 \delta f_1 + \dots + \lambda_m \delta f_n\, dt = 0$$

es claramente equivalente a $\delta S = 0$, pues el segundo término no aporta

Recordemos que $\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[E_1(t)\,\delta q_1 + \dots + E_n(t)\,\delta q_n \right] dt$

↳ si los δq_μ fueran todos indep, tengo las ecs. E-L de siempre!

con $E_\mu(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\mu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\mu}$

En la integral, agrupamos los términos que vayan con c/ δq_μ:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(E_1(t) + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \dots + (\dots)\,\delta q_n \right]$$

Ahora sí: elegimos los valores de los λ_k para anular a los factores que acompañen a los últimos m δq_μ. Los $n-m$ δq_μ restantes ahora sí son independientes, y sus factores también deben anularse:

Entonces, nos quedan n ecuaciones: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\mu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\mu} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_\mu} = 0$ $\quad \mu = 1 \dots n$

De aquí despejamos las n funciones $q_\mu(t)$. Las m funciones $\lambda_k(t)$ se despejan de las m condiciones de vínculo $f_k(q_\mu, t) = 0$

Resumiendo: En lugar de variar $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt$ con vínculos, introdujimos m nuevas variables (los λ_k), y variamos

$S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'\, dt$, con $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m$ con todas las coord. como independientes.

Vínculos anholónomos: En vez de tener m vínculos $f_k(q_\mu, t)$, son de la forma $U_1 = A_{11}(q_\mu, t)\,\delta q_1 + \dots + A_{1n}(q_\mu, t)\,\delta q_n = 0$

[en general $U_k = \sum_{\mu=1}^{n} A_{k\mu}(q, t)\,\delta q_\mu = 0$]; el proc. es el mismo: tomar $\delta S' = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_m U_m\, dt$, y quedan las ecuaciones de E-L: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\mu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\mu} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k A_{k\mu} = 0$

No obstante, no lo podemos pensar como la variación de una S'