Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2018 (B)

Guía 6: *Cuerpo rígido.*

1. Determinar los ejes principales de inercia (indicando todas las elecciones posibles) y calcular el tensor de inercia respecto del centro de masa para los siguientes sistemas:

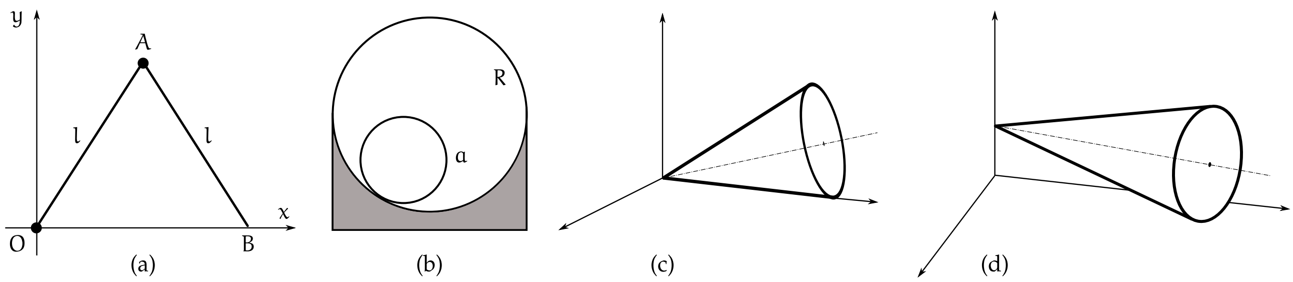
   a) Cono circular recto de altura h y radio de la base r.

   b) Anillo plano circular de radios r_1 y r_2.

   c) Esfera de radio r.

   d) Cubo de lado a.

2. Hallar la energía cinética de los sistemas mostrados en la figura:



   a) OA y AB son dos varillas delgadas homogéneas de longitud l unidas por una bisagra en A. La varilla OA gira en el plano de la figura alrededor de O; el punto B se desliza a lo largo del eje x.

   b) Un cilindro homogéneo de radio a que rueda dentro de una superficie cilíndrica de radio R.

   c) Un cono homogéneo rodando en un plano con su vértice apoyado en el plano.

   d) Un cono homogéneo rodando en un plano y cuyo eje permanece paralelo al plano.

3. Un cilindro semicircular uniforme de masa m y radio a está apoyado sobre un plano horizontal. Escriba las ecuaciones diferenciales para pequeños desplazamientos de la posición de equilibrio estable.

4. Muestre que, en términos de los ángulos de Euler, las componentes de la velocidad angular en el sistema de ejes fijo al espacio son

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi$$
$$\omega_y = \dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi$$
$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}.$$

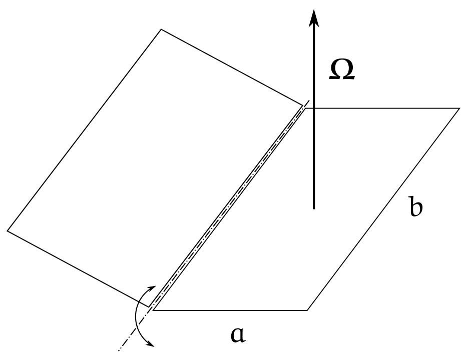
5. Dos placas rectangulares de lados a y b tienen espesor despreciable. Una de ellas se mantiene horizontal y está fija por su centro de masa a un eje que gira con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega}$ según el eje z. La otra placa está unida a la anterior por una bisagra ideal que le permite moverse como se indica en la figura. Determinar:

   a) El lagrangiano y las ecuaciones de movimiento en ausencia de gravedad.

   b) ¿Existe algún punto de equilibrio estable?

   c) El lagrangiano y las ecuaciones de movimiento con gravedad.

   d) ¿Existe ahora algún punto de equilibrio estable?

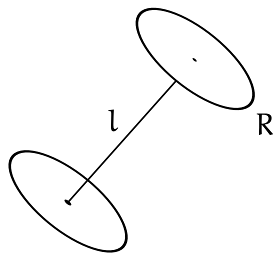


6. Los centros de dos volantes de radio R y masa m se encuentran unidos por una barra de longitud l. El ángulo formado por la barra y el plano de cada volante es siempre de $90°$. Cada volante gira libremente sobre sí mismo.

   a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

   b) Escriba el lagrangiano y encuentre constantes de movimiento. ¿Es $h = E$?

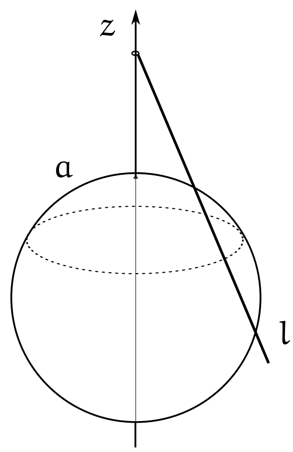
   c) Escriba las ecuaciones de movimiento.



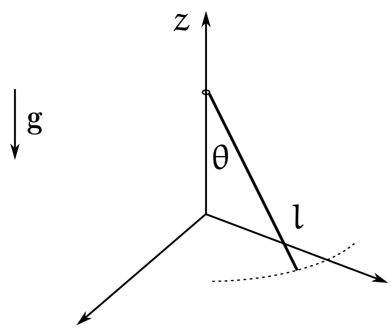
7. Si se arroja un objeto con los tres momentos principales de inercia distintos, de tal manera que gire alrededor de un eje principal con momento de inercia máximo o mínimo, el movimiento es relativamente estable, pero si se lo arroja tratando que gire alrededor del eje principal con momento intermedio, el movimiento es muy irregular ya que se ven grandes cambios en la posición del eje de rotación respecto del cuerpo (puede hacer la prueba con un libro). En efecto, utilizando las ecuaciones de Euler muestre que cuando

un cuerpo rígido en un campo gravitacional uniforme rota alrededor de un eje con momento de inercia máximo o mínimo, el movimiento es estable, y es inestable si el eje corresponde al momento intermedio. (*Sugerencia:* Suponga que inicialmente la velocidad angular es casi paralela a un eje principal y vea como evolucionan las componentes pequeñas.)

8. Uno de los extremos de una barra de longitud l y masa m puede deslizar a lo largo del eje z y tiene libertad para girar alrededor de este eje. La barra permanece apoyada sobre una esfera fija de radio a. Determinar el lagrangiano, las ecuaciones de movimiento y las magnitudes que se conservan. No hay gravedad.



9. Un extremo de la barra de la figura puede moverse sobre el eje z mientras que el otro extremo permanece sobre el plano horizontal. En $t = 0$ la barra tiene una velocidad angular $\mathbf{\Omega} = \omega_0\,\hat{z}$, $\theta(0) = \pi/4$ y $\dot{\theta}(0) = 0$.



a) Encuentre Ω_z, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ y la fuerza normal ejercida por el plano $z = 0$ sobre el extremo de la barra, todo como funciones de θ.

b) Encuentre el otro punto de retorno. (Use el hecho de que ya conoce una de las raíces de la ecuación en cuestión).

c) Suponiendo que el vínculo que mantiene fijo el extremo de la barra en $z = 0$ sólo puede ejercer fuerza en la dirección z positivo, encontrar el menor valor de ω_0 para el cual la barra eventualmente pierde contacto con el plano horizontal.

10. Un disco homogéneo de masa m y radio a es arrojado hacia arriba.

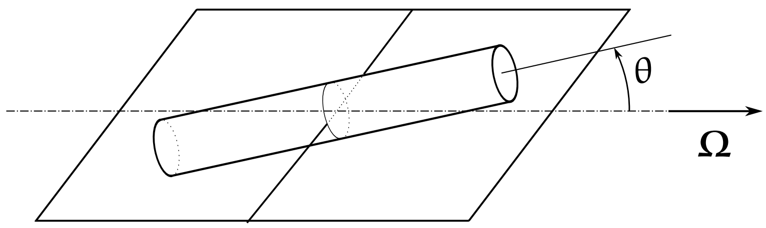
    a) Mostrar que la dinámica se desacopla en una parte de traslación y otra de rotación alrededor del centro de masa.

    b) Escribir el lagrangiano de rotación usando los ángulos de Euler.

    c) Mediante las integrales de movimiento, definir un problema unidimensional equivalente para θ.

    d) Suponer que las condiciones iniciales son tales que $\dot{\psi}(0) = \omega_0$, $\theta(0) = 0$, $|\dot{\theta}_0| \ll \omega_0$. Demostrar que θ oscila con una frecuencia que es el doble de la frecuencia ω_0.

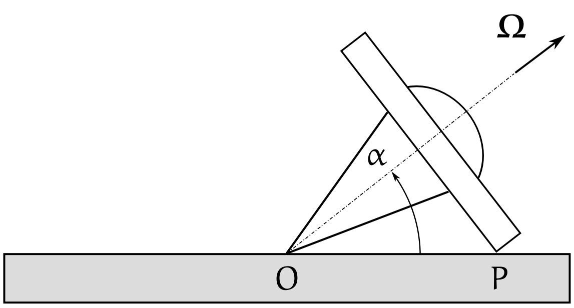
11. Un cilindro circular sólido de masa m, radio a y largo l está suspendido de un eje transversal a través de su centro de masa. Este eje gira con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega}$. Suponiendo $l > \sqrt{3}a$, encontrar las posiciones de equilibrio estable y las frecuencias de oscilación para pequeños apartamientos del equilibrio.



12. Un aro que tiene radio a y masa m rueda sin deslizar en el interior de un cilindro fijo de radio b. Encontrar el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para el aro asumiendo que el plano del aro es siempre perpendicular al cilindro.

13. Una esfera homogénea de radio a se mueve sin deslizar por la superficie interna de un cilindro vertical de radio b. Determine la ley de movimiento de la esfera.

14. Un trompo simétrico con un punto de apoyo fijo O y que inicialmente gira alrededor de su eje con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ toca el piso y casi instantáneamente (debido al rozamiento) pasa a rodar sin deslizar.



    a) Mostrar que la componente de $\mathbf{L}_O$ en la dirección de OP se conserva durante el choque.

b) ¿Cuál es la nueva velocidad angular del trompo una vez que empieza a rodar sin deslizar?

c) Escriba las ecuaciones de Euler (en términos de los ángulos de Euler) después de que el trompo empieza a rodar sobre el plano. Calcule el valor de la fuerza de rozamiento.

d) ¿Cuánto tarda el trompo en dar una vuelta alrededor de O?

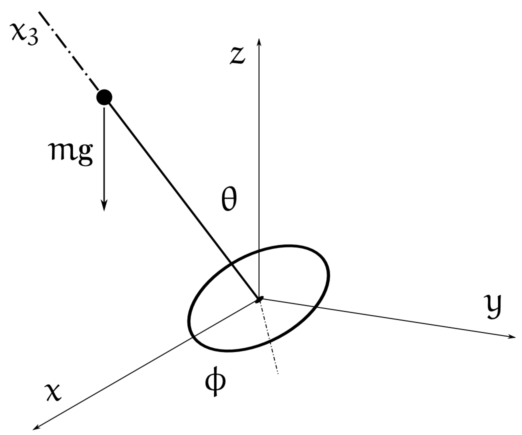
15. Un giróscopo rota alrededor del eje x_3 con velocidad angular constante $\Omega_3 = \omega$. Su momento de inercia axial es I_3 y el momento de inercia alrededor de cualquier eje en el plano $x_1 x_2$ es I. Inicialmente el volante está en posición vertical $(\theta = \pi/2)$ y $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. Un peso mg está fijo sobre el eje x_3 a una distancia d del origen. Por medio de las ecuaciones de Euler:

    a) Establecer las ecuaciones diferenciales para Ω_1, Ω_2 y Ω_3 en términos de θ, ϕ y ψ y sus derivadas.

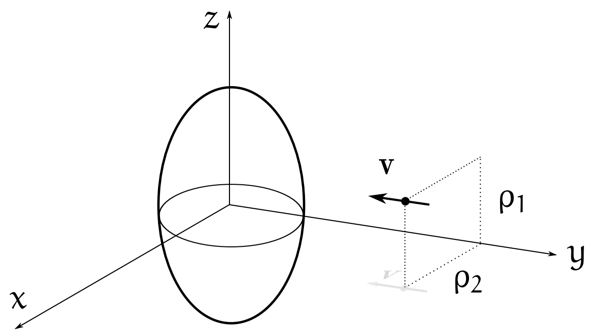
    b) Linealizar las ecuaciones obtenidas bajo la suposición de que $\theta \simeq \pi/2$ y las velocidades $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ son pequeñas.

    c) Resuelva el sistema obtenido en (b) e interprete los resultados. (*Sugerencia:* elimine en ambas ecuaciones los factores $\exp i\omega t$ usando la variable compleja $\lambda = \theta - i\phi \sin\theta_0$.)

    d) Establezca los límites de validez de la aproximación.



16. Una partícula de masa m se mueve paralelamente al eje y con velocidad $\mathbf{v}$ y con parámetros de impacto ρ_1 y ρ_2, como muestra la figura de la página siguiente. Choca y queda fija a un elipsoide de revolución homogéneo, de semiejes $a = b$ y c. Describa el movimiento del elipsoide suponiendo que su masa es mucho mayor que la de la partícula incidente.

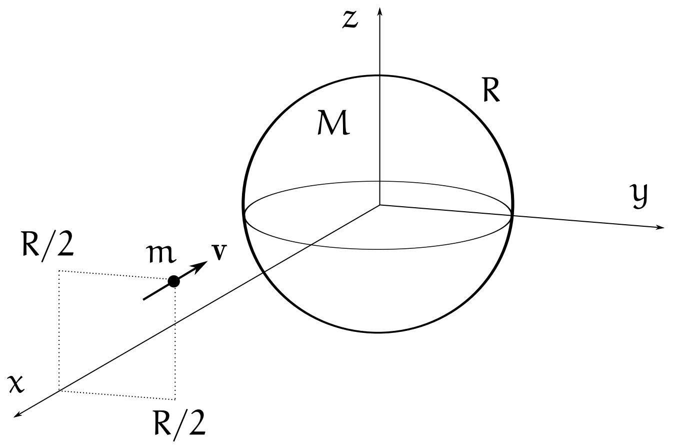


17. Una esfera homogénea de masa M y radio R está centrada en el origen. Una partícula de masa m se mueve con velocidad $\mathbf{v} = -v_0\,\hat{x}$ a lo largo de la recta definida por $z = y = R/2$. Cuando la partícula choca con la esfera queda pegada sobre su superficie. Describir el movimiento posterior del sistema si:

   a) Inicialmente la esfera no rota.

   b) Inicialmente la esfera rota con $\mathbf{\Omega} = \omega_0\,\hat{z}$.

   c) Inicialmente la esfera rota con $\mathbf{\Omega} = \omega_0\,\hat{z} + \omega_1\hat{y}$.



18. Considerar los siguientes incisos:

   q) Dado un punto O fijo al cuerpo, si $\mathbf{v}_O$ y $\mathbf{\Omega}$ son perpendiculares, mostrar que para cualquier otro punto O', también fijo al cuerpo, $\mathbf{v}_{O'}$ y $\mathbf{\Omega}$ resultan perpendiculares.

   w) Mostrar que si $\mathbf{v}_O$ y $\mathbf{\Omega}$ son perpendiculares, entonces siempre es posible encontrar un punto O' cuya velocidad $\mathbf{v}_{O'}$ sea nula.

   e) Bajo las condiciones del ítem anterior, mostrar que todos los puntos ubicados sobre una recta que pasa por O' y es paralela a $\mathbf{\Omega}$ tienen velocidad nula.

   r) Mostrar que si $\mathbf{v}_O$ y $\mathbf{\Omega}$ no son perpendiculares, entonces puede encontrarse un punto O' fijo al cuerpo tal que $\mathbf{v}_{O'}$ y $\mathbf{\Omega}$ sean paralelos.

   t) Mostrar que si $\mathbf{v}_O$ es paralelo a $\mathbf{\Omega}$, entonces nunca puede encontrarse un punto O' fijo al cuerpo tal que $\mathbf{v}_{O'}$ sea nulo ni perpendicular a $\mathbf{\Omega}$.

y) ¿En qué casos la energía cinética puede desacoplarse en un término de rotación más otro de traslación?

u) ¿Qué relación satisfacen los momentos principales de inercia cuando se tiene un sistema de partículas coplanares?

i) Mostrar que los momentos principales de inercia satisfacen la siguiente relación: $I_1 + I_2 \geqslant I_3$ (y permutaciones).

o) Mostrar que si un cuerpo tiene un eje de simetría, entonces el centro de masa está contenido en dicho eje y además es un eje principal de inercia.

p) Mostrar que si un cuerpo tiene un plano de simetría, entonces tanto el centro de masa como dos de los ejes principales de inercia están contenidos en dicho plano, y el tercer eje es perpendicular.

a) Mostrar que en un sistema colineal de partículas los momentos principales de inercia satisfacen que $I_1 = I_2$ y que $I_3 = 0$.

s) Mostrar que si un cuerpo tiene un eje de simetría de orden mayor que 2, hay degeneración en el plano perpendicular al eje.

d) Mostrar que cuando el tensor de inercia es totalmente degenerado, sus momentos principales de inercia son invariantes frente a cualquier rotación.