Mecánica Clásica, 1º cuatrimestre de 2022: Problema 0.11

Ignacio Perito (iperito@df.uba.ar)

Tenemos un rígido con simetría axial [1] que rueda sin deslizar, respecto de su eje de simetría, dentro de una rampa semiesférica. En la figura tenemos el diagrama de cuerpo libre (notar que estamos tomando los ejes cartesianos, que poca utilidad tendrán, pero la tendrán, con distinto nombre respecto de cómo aparecen en la guía).

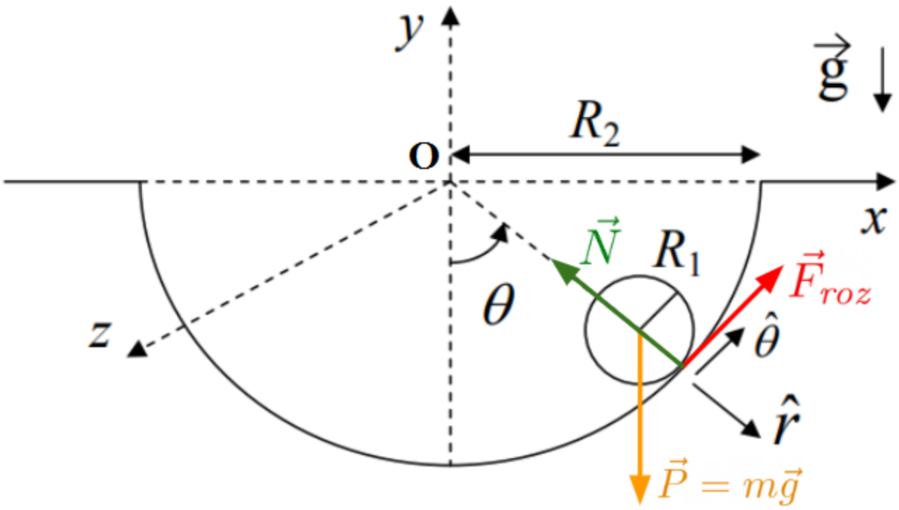

Figura 1: Esquema del problema y diagrama de cuerpo libre.

La intuición indica que, debido a la condición de rodadura, un único grado de libertad es suficiente para describir el movimiento del rígido. El primer inciso se trata de hacer explícito este hecho usando las coordenadas sugeridas por el enunciado del problema.

El ángulo θ que se define en la figura del problema es el que subtiende, respecto de la vertical, el segmento que une el centro de la semiesfera con el centro de masa del rígido. Escribir la velocidad del centro de masa del rígido es entonces trivial usando el sistema de coordenadas polares correspondiente, ya que el mismo realiza un movimiento circular de radio $R_2 - R_1$:

$$\vec{v}_{CM} = (R_2 - R_1)\dot{\theta}\hat{e}_\theta \,, \tag{1}$$

mientras que la aceleración del centro de masa se obtiene derivando la expresión anterior[2]:

$$\vec{a}_{CM} = -(R_2 - R_1)\dot{\theta}^2\hat{e}_r + (R_2 - R_1)\ddot{\theta}\hat{e}_\theta \,. \tag{2}$$

Las dos expresiones anteriores es todo lo que nos pedían en este inciso. Como vemos, al menos para describir la cinemática del centro de masa (es decir, la parte traslatoria del movimiento), es

[1] El cuerpo es invariante ante cualquier rotación con respecto al eje z.

[2] O usando la fórmula de aceleración en polares.

suficiente conocer la evolución de la variable θ. En el inciso que sigue veremos que este también es el caso a la hora de describir la parte rotatoria del movimiento del rígido.

Si, en un dado instante, llamamos **Q** al punto de contacto del rígido con la superficie, la condición de rigidez nos permite escribir:

$$\vec{v}_{\mathbf{CM}} - \vec{v}_{\mathbf{Q}} = \vec{\Omega} \wedge (\vec{r}_{\mathbf{CM}} - \vec{r}_{\mathbf{Q}}) \ . \tag{3}$$

La expresión anterior se puede escribir de una manera más simpática (y más útil) una vez que entran en consideración los vínculos del problema, a saber:

- el rígido rueda sin deslizar $\Rightarrow \vec{v}_{\mathbf{Q}} = \vec{0}$ y
- el rígido rueda en el plano xy (el plano de la hoja) $\Rightarrow \vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_z$.

Teniendo en cuenta lo anterior y que la posición relativa entre el centro de masa y el punto **Q** es simplemente $\vec{r}_{\mathbf{CM}} - \vec{r}_{\mathbf{Q}} = -R_1 \hat{e}_r$; la condición de rigidez (3) resulta:

$$\vec{v}_{\mathbf{CM}} = -\Omega R_1 \hat{e}_z \wedge \hat{e}_r = -\Omega R_1 \hat{e}_\theta \, , \tag{4}$$

igualando con la velocidad del centro de masa escrita según (1), despejamos Ω como función de $\dot{\theta}$ y, luego, el vector velocidad angular del rígido resulta:

$$\vec{\Omega} = -\frac{(R_2 - R_1)}{R_1} \dot{\theta} \hat{e}_z \, , \tag{5}$$

y, derivando con respecto al tiempo la expresión anterior, obtenemos:

$$\dot{\vec{\Omega}} = -\frac{(R_2 - R_1)}{R_1} \ddot{\theta} \hat{e}_z \, . \tag{6}$$

Tenemos entonces que, como habíamos sospechado al principio, tanto la velocidad angular como la aceleración angular también quedan determinadas una vez que conocemos $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$. Como esto también era cierto para la velocidad y la aceleración del centro de masa, tenemos que la única variable cinemática relevante del problema es θ.

El enunciado del problema no lo pide pero, por completitud, escribamos las ecuaciones de Newton y de torques para el cilindro. El diagrama de cuerpo libre ya lo presentamos al principio, así que vamos directo a los bifes: empecemos por las ecuaciones de Newton para el centro de masa. Desde luego, lo más cómodo es seguir trabajando en polares. La normal actúa en la dirección radial y hacia adentro de la rampa, así que podemos escribir directamente $\vec{N} = -N\hat{e}_r$ donde N es **el módulo** de la normal; la fuerza de rozamiento actúa en la tangencial y la escribimos $\vec{F}_{roz} = F_{roz}\hat{e}_\theta$ (F_{roz} puede ser una cantidad tanto positiva como negativa, dependiendo de qué esté haciendo el rígido). La única que necesita ser descompuesta es el peso y resulta: $\vec{P} = mg\,(\cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta)$. La aceleración del centro de masa la tenemos escrita en (2), así que simplemente multiplicamos por m e igualamos a las fuerzas, obteniendo las ecuaciones de Newton en la dirección radial y tangencial para el centro de masa del rígido:

$$\begin{aligned} -m(R_2 - R_1)\dot{\theta}^2 &= mg\cos\theta - N\,, \\ m(R_2 - R_1)\ddot{\theta} &= -mg\sin\theta + F_{roz}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Por otro lado, en la dirección $\hat{e}_z$ no pasa nada relevante en términos de la dinámica del centro de masa del rígido. Si frenamos acá, vemos que tenemos dos ecuaciones diferenciales para tres incógnitas: θ, N y F_{roz}. Las dos ecuaciones anteriores rigen la dinámica de la traslación del cuerpo rígido y la ecuación que nos está faltando es la que rige la dinámica de la rotación intrínseca del mismo, es decir, la ecuación de torques. **Es importante** siempre mantener en mente que la ecuación de torques no es otra cosa que la ley de variación del momento angular para un sistema de muchos puntos en el caso particular en el cual esos puntos se comportan como un rígido. Y la ecuación para la variación del momento angular no es otra cosa que un parafraseo conveniente de la segunda ley de Newton. **En resumen, como siempre, lo que estamos haciendo no es otra cosa que escribir las ecuaciones de Newton para el sistema de partículas, usando una parametrización conveniente**. Hecha esta aclaración, pasemos a la ecuación de torques. Vieron en la teórica que la ecuación de la variación del momento angular (medido desde el centro de masa) de un rígido adquiere una forma particularmente simple:

$$I_{\mathbf{CM}}\dot{\vec{\Omega}} = \sum \vec{\tau}_{\mathbf{CM}}\,, \tag{8}$$

donde $I_{\mathbf{CM}}$ es el momento de inercia en el eje de rotación del rígido con respecto al centro de masa y el miembro derecho es la suma de torques externos actuando sobre el sistema, también medidos desde el centro de masa. También vieron en la teórica que la ecuación se escribe igual si uno se para en un punto fijo del rígido. En este caso, por ejemplo, podríamos trabajar con el eje instantáneo de rotación que no es otra cosa que el punto de contacto **Q** entre el rígido y la rampa. Es decir, también es cierto que:

$$I_{\mathbf{Q}}\dot{\vec{\Omega}} = \sum \vec{\tau}_{\mathbf{Q}}\,, \tag{9}$$

ahora $I_{\mathbf{Q}}$ es el momento de inercia respecto de Q (el cual pueden averiguar fácilmente usando el teorema de Steiner, dado que $I_{\mathbf{CM}}$ es dato) y en el miembro derecho ahora tenemos los torques externos respecto del punto **Q**. Con cuál de las dos se trabaja es una cuestión de practicidad. En este caso iremos con la del centro de masa, les queda a ustedes de ejercicio ver que trabajando con la otra se llega a las mismas conclusiones.

Cuando nos paramos en el centro de masa, la única fuerza capaz de realizar torque es la de rozamiento (el peso, como vieron en la teórica, actúa sobre el centro de masa[3] y la normal es colineal con el vector posición de su punto de aplicación). Para un rígido como el que estamos considerando, el momento de inercia respecto del centro de masa siempre se escribe:

$$I_{\mathbf{CM}} = \alpha m R_1^2 \,, \tag{10}$$

donde α es algún factor adimensional que depende de la geometría del objeto. Por ejemplo:

- para un cilindro, $\alpha = \frac{1}{2}$
- para una esfera, $\alpha = \frac{2}{5}$
- para un aro, $\alpha = 1$.

Volviendo a lo que nos compete, y recordando que $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\Omega}\hat{e}_z$, la ecuación de torques desde el centro de masa resulta entonces:

$$\alpha m R_1^2 \dot{\Omega} \hat{e}_z = (R_1 \hat{e}_r) \wedge (F_{roz} \hat{e}_\theta) = R_1 F_{roz} \hat{e}_z \,, \tag{11}$$

de donde se desprende que:

$$\alpha m R_1 \dot{\Omega} = F_{roz} \,, \tag{12}$$

y, usando la relación (6), esto último se puede reescribir como:

$$-\alpha m (R_2 - R_1) \ddot{\theta} = F_{roz} \,, \tag{13}$$

que es la ecuación que nos andaba faltando. Con esta y las dos ecuaciones en (7), tenemos completamente determinado el problema. Si queremos la ecuación de movimiento para θ, reemplazamos la expresión para F_{roz} de la ecuación anterior y la metemos en la segunda línea de (7). Con un poquito de álgebra, esto resulta en:

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{(1+\alpha)} \frac{g \sin\theta}{(R_2 - R_1)} \,. \tag{14}$$

Antes de avanzar con la discusión alrededor de la ecuación anterior, que es mucha, vale notar que si reemplazamos la expresión para $\ddot{\theta}$ en función de θ en la ecuación (13), obtenemos:

$$F_{roz} = \frac{m g \alpha \sin\theta}{(1+\alpha)} \,, \tag{15}$$

[3] Desde luego, esto es una patraña. El peso actúa sobre cada elemento de masa del rígido. Pero cuando hacen la cuenta ven que, en términos netos, la suma es equivalente a una única fuerza actuando sobre el centro de gravedad que, dado que el campo gravitatorio en este problema es uniforme, es lo mismo que el centro de masa.

lo cual (si conocemos el coeficiente de rozamiento estático) nos permitiría ver el rango de valores del ángulo θ para el cual la condición de rodadura es posible, puesto que en esta situación el rozamiento es estático y por ende el módulo de F_{roz} está acotado. No nos lo piden explícitamente en este ejercicio pero es saludable tener en cuenta que puede hacerse.

Ahora sí, volviendo a la ecuación (14), una primera mirada deja claro que se trata de una ecuación matemáticamente análoga a la de un péndulo simple, pero con un par de modificaciones. La parte fácil de interpretar es el factor $(R_2 - R_1)$, que proviene del hecho de que esta es la distancia del centro de masa al centro de la rampa **O**. Ahora bien, hay algo más curioso y es que la ecuación (14) no es la misma que la de un péndulo simple de longitud $(R_2 - R_1)$, sino que difiere de esto último en un factor $\frac{1}{1+\alpha}$. De hecho, ¡este factor está presente independientemente de la relación entre los radios! Aún en el límite $R_1 \ll R_2$ (¿masa puntual?) en el que unx, en principio, podría llegar a esperar que reaparezca el péndulo simple, la ecuación de movimiento sigue teniendo el factor $\frac{1}{1+\alpha}$. ¿Qué es lo que pasa acá?

Para intentar resolver el misterio, es esclarecedor pensar el problema desde un punto de vista energético. Dado que ninguna de las fuerzas no conservativas presentes realizan trabajo, la energía mecánica del sistema se conserva. Como habrán visto en la teórica, la energía cinética de un cuerpo rígido puede escribirse de una forma simpática:

$$T = T_{trasl} + T_{rot} \,, \tag{16}$$

donde $T_{trasl} \equiv \frac{m}{2}\|\vec{v}_{\mathbf{CM}}\|^2$ es la energía cinética asociada a la traslación del centro de masa del rígido y $T_{rot} \equiv \frac{I_{\mathbf{CM}}}{2}\|\vec{\Omega}\|^2$ es la energía cinética asociada a la rotación del rígido alrededor de su centro de masa. En nuestro caso particular, tenemos:

$$\|\vec{v}_{\mathbf{CM}}\| = (R_2 - R_1)\dot{\theta} \Rightarrow T_{trasl} = \frac{m}{2}(R_2 - R_1)^2\dot{\theta}^2 \,, \tag{17}$$

y, para la energía cinética de rotación:

$$\|\vec{\Omega}\| = \frac{(R_2 - R_1)}{R_1}\dot{\theta} \Rightarrow T_{rot} = \frac{\alpha m}{2}(R_2 - R_1)^2\dot{\theta}^2 \,. \tag{18}$$

De las dos líneas anteriores, vemos que la condición de rodadura establece (como es esperable) un vínculo muy estrecho entre la energía cinética de traslación y la de rotación:

$$T_{rot} = \alpha T_{trasl} \,, \tag{19}$$

lo cual no depende de las dimensiones ni de la masa del rígido; sólo depende de la forma del cuerpo a través del factor α.

Como la energía se conserva, la evolución del sistema está gobernada por el intercambio entre energía potencial y energía cinética. Es decir, cuando el potencial gravitatorio cambie en una magnitud ΔV, tendremos:

$$-\Delta V = \Delta T = \Delta T_{trasl} + \Delta T_{rot} \,, \tag{20}$$

y, haciendo un poquito de álgebra con la relación anterior y (19); se tiene:

$$\Delta T_{trasl} = \frac{-\Delta V}{1+\alpha} \quad , \quad \Delta T_{rot} = \frac{-\alpha \Delta V}{1+\alpha} \,, \tag{21}$$

es decir, una fracción $\frac{1}{1+\alpha}$ de la energía potencial gravitatoria se transforma en energía cinética de traslación y la fracción complementaria $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ se transforma en energía cinética de rotación. Tenemos entonces que, independientemente de la relación entre los radios, preservar la rodadura requiere que la energía potencial vaya a parar a cada una de las componentes de la energía cinética respetando las proporciones anteriores. En particular, la primera relación en (21) puede pensarse como la ecuación de balance de una partícula puntual sometida a un campo gravitatorio de magnitud $\frac{g}{1+\alpha}$. Misterio resuelto.

Como último comentario, notar que el límite de masa puntual se obtiene tomando $\alpha \to 0$ (momento de inercia nulo), en cuyo caso toda la energía cinética es de traslación.