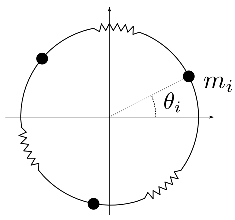
Mecánica Clásica - 1er. cuatrimestre de 2022. Cátédra Fernando Minotti.

Guía 2: *Simetrías y principios variacionales*

1. Hallá qué magnitudes, además de la energía mecánica, se conservan para una partícula sometida a los siguientes campos gravitatorios/electrostáticos (¿importa cuál de los dos es?). En cada caso, indicá claramente dónde estás ubicando el sistema de referencia y qué coordenadas estás utilizando.
   (a) El producido por una esfera.
   (b) El producido por un cilindro infinito. ¿Cómo serían las órbitas de los planetas si el Sol fuera esto?
   (c) El producido por un plano infinito.
   (d) El producido por una hélice circular infinita.
   (e) El producido por una red unidimensional de puntos separados uno del otro una distancia d.
   (f) El producido por un toro circular.
2. Dos partículas interactúan mediante un potencial $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Demostrá que el impulso angular se conserva si y solo si $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$, es decir, si el potencial depende únicamenente de la distancia entre las partículas. Relacioná esto con lo discutido en el problema 4 de la guía de repaso.
3. Considerá una partícula de masa m en presencia de un campo gravitatorio uniforme $\vec{g}$. La partícula está unida un punto fijo por medio de una varilla sin masa de longitud ℓ (péndulo esférico para les amigues).
   (a) Escribí el lagrangiano del sistema tomando como coordenadas generalizadas los ángulos esféricos, con el eje z alineado con el campo gravitatorio y el origen coincidiendo con el punto fijo.
   (b) Notá que el lagrangiano posee simetría de traslación temporal y, por lo tanto, la función de energía h es una constante de movimiento. Mostrá que h coincide con la energía mecánica E.
   (c) Notá que el problema también posee simetría de rotación en torno al eje z. ¿Qué coordenada resulta cíclica debido a esta simetría? Hallá la magnitud conservada asociada. ¿Te es familiar?
   (d) Usando la conservación anterior, escribí la energía mecánica en términos de un único ángulo y su derivada temporal. Identificá un término efectivo de energía cinética y otro de potencial efectivo. Graficá este último y describí cualitativamente los posibles movimientos del péndulo esférico.
   (e) Indicá qué condiciones iniciales debemos darle al sistema para que la varilla mantenga un ángulo fijo α con respecto a la vertical (es decir, para que el movimiento sea el de un péndulo cónico).
4. Tres partículas de masas m_1, m_2 y m_3 están enhebradas en un aro. Las partículas interactúan de a pares a través de tres resortes iguales con $V(\theta_i, \theta_j) = \frac{\kappa}{2}(\theta_i - \theta_j)^2$, donde $i, j = 1, 2, 3$, y κ es una constante (¿qué unidades tiene?). Usando el teorema de Noether, hallá las magnitudes conservadas.



5. Calculá las constantes de movimiento para una partícula un campo electromagnético, con potenciales:
   (a) $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(x, y)$; $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv A(x, y)\,\hat{z}$.
   (b) $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(x^2 + y^2, z)$; $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv A(x^2 + y^2, z)\,\hat{z}$.

6. Mostrá que las ecuaciones de movimiento quedan inalteradas si al lagrangiano se le suma la derivada total respecto del tiempo de una función arbitraria de las coordenadas y el tiempo.

7. Imaginate que sabés, de manera empírica, que una partícula cae (cerca de la superficie terrestre) una determinada distancia h en un tiempo $t_c = \sqrt{2h/g}$, pero no conocés el tiempo de caída para otras alturas distintas a h. Suponé que también conocés el lagrangiano del problema pero, en lugar de resolver la ecuación de movimiento, probás una forma funcional $y(t) = at^2 + bt + c$. Si las constantes a, b, y c se eligen de manera que la propuesta ajuste la observación empírica mencionada antes, mostrá que la integral $I = \int \mathcal{L}\, dt$ resulta un extremo para valores reales de los coeficientes sólo cuando $a = -g/2$, $b = 0$ y $c = h$. *Nota: estamos tomando $y = 0$ en el suelo, con el eje y apuntando hacia arriba.*

8. Una partícula está sometida a un potencial del tipo gravitatorio $V(r) = -k/r$. Suponiendo que las órbitas son circulares, encontrá la relación entre el período τ y el radio de las órbita a utilizando el principio variacional de Hamilton. *Ayuda: considerá la familia de órbitas elípticas con velocidad angular constante $\omega = 2\pi/\tau$ (¿son físicamente plausibles? ¿importa?), dada por $x(t) = a\cos\omega t$, $y(t) = b\sin\omega t$; y tomá pequeños apartamientos respecto de la órbita circular tomando $b = a + \delta a$.*

9. Cuando se arroja un objeto hacia arriba desde la superficie terrestre y con velocidad inicial v_0, el tiempo que pasa hasta que vuelve a tocar el suelo es $t_c = 2v_0/g$. A partir de una función de prueba dada por

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \Big],$$

con $\omega = 2\pi/t_c$, encontrá la mejor aproximación a la trayectoria con el criterio del principio de Hamilton. Compará la solución obtenida con la correspondiente al resultado $y(t) = v_0 t - gt^2/2$. ¿Qué conclusiones sacás? *Ayudas: tené en cuenta las condiciones de extremos fijos de la trayectoria y anulá todos los coeficientes que dichas condiciones te permitan. Aprovechá también las relaciones de ortogonalidad para integrales de productos de funciones trigonométricas (si no las recordás, buscalas).*

10. Una partícula de masa m está sometida a un potencial armónico $V(x) = kx^2/2$. Encontrá la ecuación de movimiento minimizando la acción de la siguiente manera:

    (a) Dividí el intervalo de integración, $[t_i, t_f]$, en n partes iguales de tamaño $\Delta t \equiv \frac{t_f - t_i}{n}$.

    (b) Discretizá la coordenada x según $x_\ell \equiv x(\ell \Delta t)$ (con $\ell = 0, \ldots, n$) y hacé lo propio con las derivadas: $\dot{x}_\ell \equiv \frac{x_{\ell+1} - x_\ell}{\Delta t}$ (con $\ell = 0, \ldots, n-1$). Reemplazá la integral por una sumatoria.

    (c) Imponé la condición de extremo $\partial S/\partial x_\ell = 0\ \forall \ell$. Tomá el límite $n \longrightarrow \infty$ e interpretá el resultado.

    Para pensar: ¿por qué en este problema obtuvimos la ecuación de movimiento mientras que en los tres anteriores obtuvimos las soluciones $\vec{r}(t)$ -es decir, las soluciones a las ecuaciones de movimiento-?

11. Hallá la curva de longitud mínima que une dos puntos dados sobre la superficie de un cilindro.

12. Según el principio de Fermat, cuando la luz se mueve en dos dimensiones sigue una trayectoria que hace extrema la integral $\int_1^2 n(x,y)\, ds$, donde $n(x,y)$ es el índice de refracción del medio que la luz está atravesando. Mostrá que si $n(x,y) = n_0(1 + y/h)$ (¿qué significa esto físicamente?), con n_0 y h constantes, la trayectoria de la luz está dada por $y = -h + (\alpha h/n_0)\cosh(\beta + n_0 x/\alpha h)$, donde α y β son constantes. *Ayuda: considerá las ecuaciones de Euler$-$Lagrange asociadas a este problema.*