Mecánica Clásica - 1er. cuatrimestre de 2022. Cátedra Fernando Minotti.

Guía 3: *Fuerzas centrales y dispersión*

1. Una partícula de masa m se mueve en un potencial generado por un centro de fuerzas fijo en el origen. El potencial tiene la forma $V(r)$, siendo r es la distancia entre la partícula y el origen de coordenadas.

   (a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el problema? *Pista 1: la respuesta es tres.*

   (b) A partir de las simetrías del problema, indicá las cantidades conservadas. En particular, mostrá que **el vector** momento angular de la partícula se conserva. Concluí que el movimiento será plano. ¿Es válido decir que dicha conclusión le impone un vínculo al problema? *Pista 2: ver la pista 1.*

   (c) Sabiendo que el movimiento será plano, elegí un sistema de coordenadas generalizadas *amigables* y mostrá que la evolución de una de ellas será completamente trivial (se mantiene constante).

   (d) Después de haber discutido y comprendido todo lo anterior, podés relajarte y escribir un lagrangiano $\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$ sin sentirte unx delincuente. Hacelo y obtené la ecuación de Euler-Lagrange para r. A partir de ella, y definiendo $u \equiv r^{-1}$, derivá la ecuación diferencial para la órbita:

   $$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{m}{\ell^2}\frac{dV}{du} = 0\,,$$

   donde ℓ es el módulo del momento angular.

   (e) Mostrá que las órbitas serán simétricas respecto de el/los punto/s de retorno.

   (f) Desde aquí y hasta que termine el problema, particularizá la ecuación de la órbita para $V(r) = -\frac{k}{r}$ con $k > 0$ (problema de Kepler), Mostrá que la solución más general puede escribirse como:

   $$u(\varphi) = A\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{mk}{\ell^2}, \quad \text{o bien:} \quad r(\theta) = \frac{\ell^2}{mk}\left(\frac{1}{1 + \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}\right)\,,$$

   donde definimos *la excentricidad* $\epsilon \equiv \frac{A\ell^2}{km}$. Notá que ϵ y φ_0 son las dos constantes de integración de la ecuación de la órbita y, por ende, quedan determinadas a partir de las condiciones iniciales. ¿Cómo se relacionan ϵ y φ_0 con la posición de máximo acercamiento al centro de fuerzas?

   (g) Pará un cachito. El momento angular ℓ también queda determinado por las condiciones iniciales. ¿Hay tres constantes de integración? ¿Estamos todos locos? ¿Qué es lo que pasa acá?

   

   (h) Una vez resuelto el desbarajuste anterior, mostrá que la excentricidad puede escribirse en términos de la energía y el momento angular de la órbita según:

   $$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}\,.$$

   (i) Verificá que las órbitas son secciones cónicas y clasificalas en función de los posibles valores de ϵ. *"Verificá" significa que podés simplemente googlear la forma polar de las secciones cónicas.*

   (j) En el caso de órbitas ligadas (es decir, las elípticas), mostrá que la órbita puede escribirse:

   $$r(\varphi) = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1 + \epsilon\cos\varphi}\,,$$

   donde a es el semieje mayor de la elipse y tomamos la convención usual de elegir $\varphi_0 = 0$.

   (k) Siguiendo en el caso de órbitas elípticas, demostrá la tercera ley de Kepler. *Ayuda: mostrá primero que la velocidad areolar es constante y escribí dicha constante de manera conveniente.*

2. A veces, la ecuación diferencial que obtuviste en el inciso (d) del problema 1 resulta un poco intimidante. En esos casos, puede ser más ameno disponer de una relación integral entre u y φ. Para ello:

   (a) A partir de la conservación de la energía mecánica E y del momento angular ℓ, mostrá que:
   $$\int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)}} + C\,,$$
   con C una constante de integración. *Notá que, de ser resuelta, esta integral nos da $r(t)$ y, reemplazando en la conservación de ℓ, obtenemos $\dot{\varphi}(t)$ (y por ende $\varphi(t)$); lo cual resuelve el problema.*

   (b) Usá la conservación del momento angular para eliminar dt de la expresión anterior y obtener:
   $$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - \frac{2mV(\tilde{r})}{\ell^2} - \frac{1}{\tilde{r}^2}}}, \quad \text{o bien} \quad \varphi - \varphi_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{d\tilde{u}}{\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - \frac{2mV(\tilde{u})}{\ell^2} - \tilde{u}^2}},$$

   (c) Particularizá la última ecuación al caso de un potencial que sigue una ley de potencias $V(r) = kr^s$ y verificá que, en el caso $s = -1$, recuperás la órbita de Kepler. *Nota: esta integral también es resoluble de forma analítica y cerrada en el caso $s = 2$ (oscilador isótropo). Tenela a mano.*

3. Para una partícula en un campo central $V = kr^s$, donde k y s son constantes:

   (a) ¿Cómo deben ser k y s para que las órbitas ligadas sean posibles?

   (b) Considerá las siguientes transformaciones (cambios de escala) de las coordenadas y del tiempo:
   $$\vec{r} \to \vec{r}\,' = \alpha\vec{r}\ ,\ t \to t' = \beta t\,,$$
   donde α y β son constantes (estas transformaciones se llaman *dilataciones*[*]). Escribí el nuevo lagrangiano y mostrá que si $\beta = \alpha^{1-s/2}$, las ecuaciones de movimiento quedan intactas. En particular, mostrá que si T y D son un tiempo y una distancia característicos de una solución a las ecuaciones de movimiento; T' y D' también caracterizarán una órbita plausible si $\frac{T'}{T} = \left(\frac{D'}{D}\right)^{1-s/2}$.

   (c) Particularizá al caso $s = -1$. ¿Constituye esto una demostración de la tercera ley de Kepler?

   (d) Volvé a usar el resultado del inciso (b) pero ahora para un oscilador isótropo ($s = 2$). Interpretá.

   (e) *Pregunta picante:* si las ecuaciones de movimiento quedan invariantes ante cambios de escala como los del inciso (a), también quedan invariantes ante la versión infinitesimal de esas transformaciones. Dicho eso, ¿podemos decir que el teorema de Noether nos ofrece una cantidad conservada asociada a dicha transformación? Si tu respuesta es sí, contanos cuál es esa cantidad. Si tu respuesta es no, explicanos por qué la buena de Emmy nos suelta la mano en este caso.

4. Dos partículas interactúan gravitatoriamente y orbitan una en torno a la otra de manera ligada. El período del movimiento es τ. En el instante de máximo alejamiento entre las partículas, estas se detienen súbitamente. Hallá, en función de τ, cuánto demoran en chocar usando estos dos enfoques:

   (a) *Enfoque conservador:* escribí la ecuación diferencial para r y expresá el tiempo en términos de una integral. Evaluá la integral ayudándote con una computadora.

   (b) *Enfoque canchero:* la órbita subsiguiente al instante en que las partículas se detienen puede pensarse como un tipo muy particular de elipse. Pensá cómo es esa elipse y obtené el resultado usando únicamente la tercera ley de Kepler.

   *Aplicación: **si existiera** un dios y este decidiese, repentinamente, detener el movimiento orbital de la Luna con respecto a la Tierra; ¿cuánto tiempo tendríamos para arrepentirnos de nuestros pecados?*

[*]Nada tienen que ver con el fenómeno relativista.

5. Una partícula de masa m se mueve bajo el potencial $V = kr^2/2$ (oscilador isótropo).
   (a) Hallá el potencial efectivo y describí las órbitas posibles en función de las condiciones iniciales.
   (b) Encontrá el período de las órbitas circulares y confirmá lo que obtuviste en el problema 3 (d).
   (c) Estudiá las órbitas que difieren ligeramente de la órbita circular. ¿Qué aspecto tienen?
6. Una partícula de masa m se mueve en un campo de fuerzas $\vec{F}(r) = (-k/r^2 + c/r^3)\,\hat{e}_r$ con $c, k > 0$.
   (a) Escribí la ecuación diferencial para $u \equiv 1/r$ en función del ángulo φ y resolvela. Mostrá que:
   $$r(\varphi) = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\alpha\varphi}, \text{ con } \alpha \equiv \sqrt{1+\frac{2cm}{\ell^2}}.$$
   (b) Mostrá que si redefinís el ángulo φ y el momento ℓ de manera conveniente, la ecuación diferencial de la órbita de este problema se reduce a la de Kepler. Conciliá esto con el resultado anterior.
   (c) Mostrá que la órbita resulta una elipse que precede en el tiempo. La frecuencia de precesión puede definirse como el cociente entre el desplazamiento angular del perihelio y el período (entendiendo por período el tiempo que demora la partícula en volver a alcanzar el perihelio). Calculala.
7. Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de un potencial central $V(r) = k/r^2$.
   (a) Hallá la ecuación de la trayectoria de la partícula como función de constantes de movimiento para el caso en que el potencial sea repulsivo y $E > 0$. Interpretá el movimiento bidimensional (r, φ) en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujá la trayectoria. Calculá las direcciones de las asíntotas, si las hubiere. ¿Qué ocurre cuando $k = 0$? Verificá que en el límite $k \longrightarrow 0$ la solución hallada es la físicamente correcta. potencial central $V(r) = k/r^2$.
   Nota: fijate que en este caso podés hacer una redefinición similar a la que hiciste en el problema 6 *(b) y recuperar un viejo conocido. ¿Quién es ese viejo conocido?*
   (b) Suponé ahora que el potencial es atractivo y que $l^2 < -2mk$ y $E < 0$. Interpretá el movimiento bidimensional en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujá la trayectoria. Calculá el tiempo que tarda la particula en llegar al origen si partió de un punto de retorno. Para calcular la trayectoria, es cómodo tomar $\varphi = 0$ en el punto de retorno r_0.
   (c) ¿Qué ocurre cuando $l^2 > -2mk > 0$?

   Ayuda: te encontrarás con integrales espeluznantes. Mantenete cerca de Wolfram Alpha.
8. Una partícula de masa m se mueve en un campo de fuerzas central $\vec{F}(r) = (-kr + c/r^3)\hat{e}_r$.
   (a) Escribí el lagrangiano y hallá las constantes de movimiento.
   (b) Hallá $r(\varphi)$. Podés volver a aprovechar la triquiñuela de redefinir el ángulo y el momento angular.
   (c) Graficá cualitativamente la trayectoria de la partícula para $c = 0$ (¡oscilador isótropo!) y $c \neq 0$.
   (d) Pensá en qué casos la órbita no será cerrada y calculá la velocidad angular de precesión.
9. Un satélite de masa m se mueve en un potencial central atractivo, $V(r) = -k/r$. Súbitamente el valor de la constante k se reduce a la mitad. Encontrá la nueva órbita.
10. Calculá la sección eficaz de dispersión de partículas de masa m en un pozo de potencial esféricamente simétrico, con $V = 0$ para $r \geq a/2$ y $V = -V_0$ para $r < a/2$.
11. Calculá la sección eficaz diferencial y total para partículas que inciden paralelamente al eje z y chocan de manera perfectamente elástica sobre un paraboloide de revolución $z = ar^2$, con $r \equiv \sqrt{x^2+y^2}$.