Primer parcial de Mecánica Clásica (B). Primer cuatrimestre de 2022.

Entregá cada ejercicio en hojas separadas y justificá todas tus respuestas. Para aprobar es necesario tener el 60 % del examen resuelto correctamente y al menos la mitad de cada problema bien planteado.

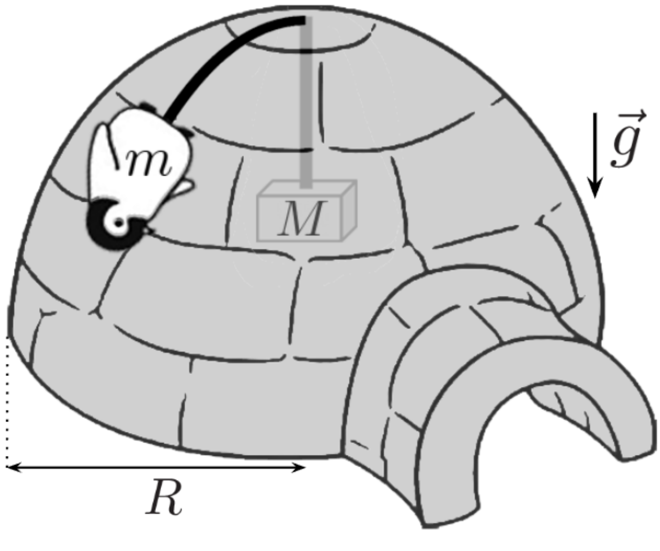
Problema 1. Un pingüino embalsamado tiene masa m y desliza sin fricción sobre un iglú semiesférico de radio R. El difunto ovíparo se encuentra atado a una soga ideal cuya longitud es también R y pasa por un agujero en el punto más alto del iglú. Del otro extremo de la soga, y en el interior del iglú, cuelga un bloque de hielo de masa M que sólo se mueve verticalmente. La porción de soga que conecta la finada ave con el orificio siempre se dispone de manera que recorre la menor distancia posible sobre la superficie del iglú, como se ve en la figura. Hay gravedad, desde luego.

(a) Indicá los vínculos del sistema y la cantidad de grados de libertad. Elegí un sistema de coordenadas generalizadas para describirlo. Obtené el lagrangiano en términos de las mismas y hallá dos cantidades conservadas.

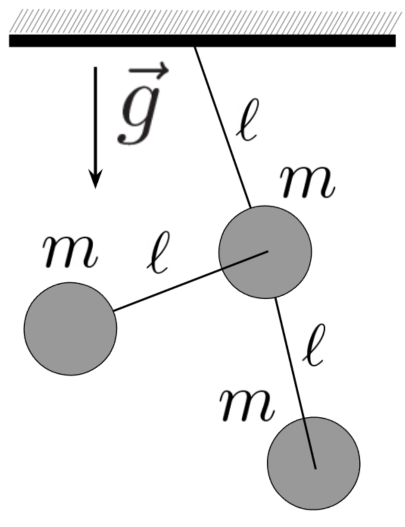
(b) Usá las cantidades conservadas que hallaste recién y obtené un problema efectivo en términos de una única variable. Escribí la expresión general del potencial efectivo. Analizar y hacer un gráfico preciso de este potencial puede ser bastante complicado; pero mostrá que siempre tiene algún mínimo (no necesariamente en un valor con sentido físico de tu coordenada). ¿En qué rango de valores de tu variable de interés debe estar ese mínimo para que las órbitas ligadas (es decir, que el bloque oscile sin tocar ni el techo ni el suelo) sean posibles?

(c) Si se ve al ex plumífero realizando órbitas circulares a 45° respecto del eje vertical que define la soga dentro del iglú; obtené, en función de datos, el tiempo que demora en completar una vuelta. ¿Qué relación debe existir entre la masa del vertebrado y la masa del bloque para que este movimiento sea posible?

> *Si llegaste hasta acá y empezás a sentir que el fascinante y vasto mundo de los pingüinos embalsamados que deslizan sobre iglúes no es lo suficientemente estimulante como para compensar el trauma que te está ocasionando estudiar esta carrera, calma: puede que encuentres algo de motivación del otro lado de la hoja.*



(a) Problema 1



(b) Problema 2

Problema 2. Considerá un péndulo triple, formado por tres partículas de masa m que están conectadas por sogas ideales de largo ℓ como se ve en la figura. Notá que las conexiones están hechas de manera que las partículas oscilan en tres planos paralelos distintos (es decir, no se pueden chocar entre sí). Por supuesto que hay gravedad.

(a) Elegí un sistema de coordenadas generalizadas y escribí el lagrangiano del problema. Particularizalo al régimen de pequeñas oscilaciones en torno a la configuración de equilibrio estable. ¿Cómo quedan las matrices $\mathbb{M}$ y $\mathbb{V}$?

(b) Encontrá las frecuencias de los modos normales y sus respectivos vectores de amplitudes relativas. Interpretá y esquematizá el movimiento de cada modo. Calculá la coordenada normal asociada al modo de frecuencia intermedia e interpretá el movimiento cuando es nula. *Ayuda: si algún argumento de simetría te permite intuir algo sobre el aspecto de los vectores de amplitud, y eso te ayuda a esquivar alguna cuenta, bienvenido sea.*

Mientras transcurre este examen, la colaboración Event Horizon Telescope (lxs mismxs dementes que en 2019 publicaron una foto de M87, el agujero negro supermasivo que yace en el centro de la galaxia Messier 87) lleva a cabo una conferencia de prensa en la que, según se comenta, revelarán algo bastante espectacular sobre nuestra querida Vía Láctea. Para estar en armonía con semejante anuncio, mirá el siguiente problema.*

Problema 3. En el caso de campos centrales, los efectos de la relatividad general pueden meterse *por la ventana* en el formalismo de la gravedad newtoniana agregando un término atractivo al potencial efectivo, de manera que:

$$V_{\mathit{eff}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GM\ell^2}{mc^2r^3},$$

donde m es la masa del cuerpo en movimiento, ℓ es su momento angular (que se conserva, claro); M es la masa del objeto que genera el campo gravitatorio (el cual supondremos quieto bajo la hipótesis $M \gg m$); $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ es la constante de gravitación universal y $c = 3 \times 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ es la velocidad de la luz[1].

(a) Mostrá que existe un valor crítico ℓ_c del momento angular (y hallalo) debajo del cual las órbitas ligadas no son posibles. Interpretá. Usando este resultado, obtené una cota inferior para el momento angular orbital de la Tierra (considerá que la masa de nuestro planeta es $M_\oplus = 6 \times 10^{24}$kg y la del Sol es $M_\odot = 2 \times 10^{30}$kg. Describí, en función de la energía, qué movimientos son posibles cuando $\ell < \ell_c$.

(b) Cuando el momento angular es mayor a ℓ_c, mostrá que no hay uno ¡sino dos! radios admisibles para órbitas circulares, siendo una de ellas estable y la otra inestable. ¿Cuál es inestable? ¿La de radio menor o la de radio mayor? Interpretá. Describí, en función de la energía, los movimientos posibles para $\ell > \ell_c$.

(c) Cerca del centro de la Vía Láctea hay una estrella que se llama S2, de la cual probablemente hayas visto algún video[2]. Esta estrella orbita de manera ligada en torno *a algo* que no vemos (pero que está ahí, claro, y hasta tiene nombre: *Sagitario A**; o Sgr A*, como le dicen sus amigues). En mayo de 2018, vimos a S2 alcanzar el pericentro de su órbita y, en dicho punto, la distancia de S2 a Sgr A* fue de 17 horas luz, mientras que su velocidad era de $2{,}5c \times 10^{-2}$ (sí, leíste bien, 2,5 % de la velocidad de la luz). En contraparte, la distancia en el apocentro son unas 278 horas luz, y su velocidad en ese punto resulta algo así como $3c \times 10^{-6}$. Usá esta información para estimar M, es decir, la masa de lo que quiera que sea que estamos llamando Sgr A*. Expresá tu respuesta como un múltiplo de $M_\odot$, la masa de nuestro -en contraste- pequeño e inofensivo Sol.
Para que te des una idea, las estrellas más masivas que conocemos están en el orden de $250M_\odot$.

Léase luego del examen: *otra de las tantas estrellas que orbita en torno a Sgr A* se llama S14 y resulta particularmente relevante porque es, hasta donde sabemos, la que más cerca pasa del misterioso gigante invisible. El perihelio de S14 vale algo así como seis horas luz. Esto significa que, sea lo que sea la descomunalmente oculta entidad que hemos bautizado Sgr A*, tiene que tener un radio menor a seis horas luz. Hasta donde se sabe, los únicos objetos astronómicos capaces de contener tal bestial cantidad de masa en tan minúsculo volumen (no parece tan minúsculo, ¿verdad?) son los agujeros negros. El último inciso del problema anterior pretendió esbozar una idea de por qué tenemos buenas razones para pensar que Sgr A* es un agujero negro. Al salir del aula, googleá. Puede que ya haya una foto del muñeco este circulando por internet.*

Problema 4. Una partícula está inmersa en un campo gravitatorio uniforme pero no constante[3] dado por $\vec{g} = -\gamma t \vec{e}_y$, siendo γ una constante con unidades adecuadas. A $t = 0$, la partícula se lanza desde $y = 0$ hacia valores de y positivos (en criollo, un tiro vertical), observándose que vuelve al punto inicial al cabo de un tiempo τ. Alguien poco pragmático decide dar con una solución al problema buscando la mejor aproximación (según el principio de Hamilton) entre los miembros de una familia de funciones de la forma $y(t) = a + \ell \sin(\omega t)$, con a, ℓ y ω parámetros libres.

(a) Usá las condiciones de extremos fijos para inferir lo que puedas sobre los parámetros a, ℓ y ω, y luego escribí la acción como función de el/los parámetro/s restante/s. *Ojo: a la hora de sacarle información a las condiciones de extremos fijos; tené en cuenta que la partícula* ***no pasa*** *por $y = 0$ para ningún $t \in (0, \tau)$*

(b) Imponiendo la condición de acción estacionaria, hallá la solución aproximada que obtuvo la persona poco pragmática. ¿Cuánto vale la altura máxima y en qué instante es alcanzada? Compará esos valores con los que obtendría una persona más sana, que resuelve el problema de manera exacta usando el formalismo newtoniano.

[1] Esta es la corrección que permite dar cuenta de la precesión del pericentro en la órbita de cuerpos que, como Mercurio, se encuentran muy próximos a sus centros de fuerzas. Notá también que el término de corrección domina para r pequeño pero se vuelve irrelevante si r es lo suficientemente grande; por eso la gravedad newtoniana funciona bien en problemas más mundanos que los que estudiaremos aquí.

[2] Si no lo viste, no importa... pero después buscalo.

[3] Esto no es tan extraño como parece, pues eligiendo γ de manera adecuada, el campo resulta aquel que experimenta una partícula cargada al moverse en un campo eléctrico uniforme cuya intensidad aumenta linealmente con el tiempo, o bien aquel que *experimenta* un objeto dentro de un sistema de referencia que se mueve en línea recta con una aceleración que aumenta linealmente con el tiempo.