

Mecánica Clásica (B). Primer cuatrimestre de 2022.

Resolución del primer parcial.

Ignacio Perito (iperito@df.uba.ar)

Aquí va la resolución del primer parcial. Tengan en cuenta que van a encontrar varios comentarios adicionales sobre cosas que no se pedían explícitamente en las consignas; así que no se alarmen si ven cosas que ustedes no hicieron en el examen.

1. Problema 1: el pingüino ataca de nuevo.

1.1. Inciso (a)

Si tomamos un punto de referencia en el centro del iglú, el vector posición del pingüino debe satisfacer $|\vec{r}_p| = R$. Si el eje \hat{e}_z apunta según la vertical, para el bloque de hielo tendremos $x_b = \text{cte}$ e $y_b = \text{cte}$. Por ahora van tres vínculos, pero además tenemos a los cuerpos conectados por una soga. Aquí ya conviene parametrizar a la posición del pingüino utilizando coordenadas esféricas con respecto al mismo origen y el mismo eje \hat{e}_z mencionados recién, de manera que la porción de soga que está apoyada sobre el iglú resulta $R\theta$. Si para el bloque usamos la coordenada z_b desde el piso, la porción de soga que cuelga dentro del iglú mide $R - z_b$, de manera que el vínculo asociado a la soga inextensible puede escribirse $R\theta + (R - z_b) = R$ o, lo que es lo mismo:

$$R\theta = z_b. \quad (1)$$

En resumen, tenemos 4 vínculos holónomos para las coordenadas de dos partículas, por lo que el número de grados de libertad resulta dos. Utilizaremos los ángulos esféricos del pingüino como coordenadas generalizadas. En términos de los mismos, las velocidades de los dos cuerpos resultan:

$$\vec{v}_p = \left(\sin \theta \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{\theta} \hat{e}_\theta \right) \quad \text{y} \quad \vec{v}_b = \dot{z}_b \hat{e}_z = R \dot{\theta} \hat{e}_z, \quad (2)$$

donde, en la última igualdad, simplemente derivamos ambos miembros del vínculo (1) con respecto al tiempo. Elevando al cuadrado y multiplicando por las masas correspondientes obtenemos la energía cinética del sistema:

$$T = \frac{R^2}{2} \left[(m + M) \dot{\theta}^2 + m \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right]. \quad (3)$$

El potencial gravitatorio se obtiene fácilmente escribiendo las alturas de cada cuerpo respecto del suelo y resulta $V = mgR \cos \theta + MgR\theta$. El lagrangiano del sistema resulta, entonces:

$$\mathcal{L} = \frac{R^2}{2} \left[(m + M)\dot{\theta}^2 + m \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right] - gR (m \cos \theta + M\theta). \quad (4)$$

Como el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, la función energía se conserva. Además, coincide con la energía mecánica, por todas esas cuestiones alrededor de la energía cinética y la energía potencial que ustedes ya saben y deben haber explicado muy bien en sus resoluciones. Tenemos entonces que:

$$E = T + V = \frac{R^2}{2} \left[(m + M)\dot{\theta}^2 + m \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right] + gR (m \cos \theta + M\theta) \quad (5)$$

es una constante de movimiento.

Por otro lado, la coordenada φ es cíclica, así que:

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad (6)$$

es la otra constante de movimiento que buscamos.

1.2. Inciso b

Despejando $\dot{\varphi}$ de la conservación del momento conjugado p_φ y reemplazando en la conservación de la energía, obtenemos:

$$E = \frac{(m + M)}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta), \quad (7)$$

donde ya queda definido el potencial efectivo como:

$$V_{eff}(\theta) \equiv \frac{p_\varphi^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} + gR (m \cos \theta + M\theta). \quad (8)$$

Les pedíamos mostrar que esto tiene algún mínimo. Eso es sencillo de ver, sin hacer ninguna derivada, pues:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} V_{eff}(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} V_{eff}(\theta) = +\infty \quad (9)$$

y, como $V_{eff}(\theta)$ es una función continua en el intervalo $(0, \pi)$, necesariamente debe alcanzar algún mínimo en dicho intervalo. Encontrar ese mínimo en general puede ser un poco delicado, pero viene bien ganar algo de intuición con algún caso sencillo. El término centrífugo va como $1/\sin^2 \theta$, por lo que es simétrico respecto de $\theta = \pi/2$; así que ese término alcanza su mínimo absoluto en ese valor de θ . Si las masas son iguales, es fácil ver que la suma de los términos de potencial gravitatorio tienen derivada nula en ese mismo ángulo, por lo que, en el caso particular

de masas iguales, el potencial efectivo tiene un mínimo en $\theta = \pi/2$. Este ángulo no tiene sentido físico en nuestro problema por dos razones: la primera es que ese ángulo corresponde al pingüino a la altura del suelo (allí, el peso del pingüino proyectado en la tangente del iglú es igual a todo su peso que, a su vez, es igual al peso del bloque pues las masas son iguales). Esta situación podría tener relevancia física en un problema en el cual no está presente el suelo y $\theta = \pi/2$ es un ángulo permitido pero, además, necesitaríamos un vínculo que mantenga al pingüino unido al iglú (si el pingüino realiza órbitas circulares en $\theta = \frac{\pi}{2}$, debe haber una fuerza de vínculo que apunta hacia el centro del iglú, y la normal no tiene esa capacidad). La segunda razón es mucho más mundana: el largo de la soga es R , por lo que el ángulo máximo que puede alcanzar el pingüino con respecto a la vertical es igual a un radián (algo así como 57 grados).

La última observación nos permite responder la otra pregunta que nos hacía el inciso: para que las órbitas ligadas sean posibles, necesitamos que el potencial efectivo tenga un mínimo para algún $\theta \in (0, 1)$. Con algo de imaginación, uno podría pensar cómo se mueve el mínimo hallado en el párrafo anterior cuando empezamos a variar las masas diferentes (por ejemplo, la intuición nos dice que el bloque siendo más pesado que el pingüino es una manera de que las órbitas ligadas sean posibles), pero eso no era parte del ejercicio y ahí es donde la cosa se pone delicada. De todas formas les sugiero fuertemente que vayan a jugar con algún graficador en la compu a ver qué aspecto puede tener el potencial efectivo para distintos valores de los parámetros. Si van a hacer esto, noten que sólo hay dos parámetros independientes para mover, porque haciendo una factorización adecuada del potencial efectivo, siempre pueden decir que:

$$V_{eff}(\theta) \propto \frac{1}{\sin^2 \theta} + a \cos \theta + b\theta, \quad (10)$$

con a y b definidos convenientemente.

1.3. Inciso c

En este caso la cosa es más amigable, porque nos dicen cómo se está moviendo el sistema. Si el pingüino realiza una órbita circular a $\pi/4$ de la vertical (notar que es un ángulo perfectamente admisible pues $\pi/4 < 1$), entonces el potencial efectivo tiene un mínimo en $\theta = \pi/4$ y la energía mecánica es igual al valor del potencial efectivo en ese mínimo. Antes de abalanzarnos a hacer cuentas, conviene notar que como el término cinético proporcional a $\dot{\theta}$ es nulo en esta situación, igualar la energía mecánica con el valor del potencial efectivo en $\pi/4$ es lo mismo que decir:

$$p_\varphi = mR^2 \sin^2(\pi/4) \omega = \frac{mR^2 \omega}{2}, \quad (11)$$

donde simplemente llamamos ω a $\dot{\theta}$ que es una constante. Si lo anterior les hace ruido, simplemente evalúen la energía en un instante cualquiera y vean que, al igualar con el potencial efectivo, los términos gravitatorios se cancelan y queda lo que acaban de ver. Nos interesa encontrar el período de la órbita pero si hallamos ω lo tenemos servido, así que allá vamos. Nos falta imponer la condición de mínimo de V_{eff} en $\theta = \pi/4$. Derivando e igualando a cero obtienen:

$$-\frac{2p_\varphi^2 \cos(\pi/4)}{m \sin^3(\pi/4) R^2} - mgR \sin(\pi/4) + MgR = 0. \quad (12)$$

Reemplazando p_φ en términos de ω en lo anterior, luego de algo de álgebra, obtenemos:

$$\omega^2 = \frac{g}{R} \left(\frac{M}{m} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left(\frac{M}{m} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-1/2}. \quad (13)$$

De las expresiones anteriores se ve algo bastante intuitivo y es que cuanto mayor es el cociente entre la masa del bloque y la del pingüino, mayor es la frecuencia del movimiento (o menor el período). Finalmente, para responder la pregunta sobre qué relación debe existir entre las masas, podemos pedir que el miembro derecho de la expresión para ω^2 sea positivo, lo cual corresponde a imponer que:

$$M > \frac{m}{\sqrt{2}}. \quad (14)$$

Este resultado lo podríamos haber intuido desde el comienzo. Si multiplicamos la desigualdad anterior por g , tenemos que, para que el movimiento circular sea posible, el peso del bloque debe ser mayor al peso del pingüino proyectado sobre la tangente al iglú (si no pasara esto, la fuerza neta sobre el pingüino no podría apuntar *hacia adentro*).

2. Problema 2: ¿quién te conoce, péndulo doble?

Para escribir el lagrangiano del problema general, tomaremos como coordenadas generalizadas los tres ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 de cada péndulo respecto de la vertical (llamaremos 1 a la partícula que cuelga del techo) y escribiremos la energía cinética y potencial con respecto a un origen fijo al enganche de la primera soga al techo. En ese sistema, la velocidad de la primera partícula es sencilla:

$$\vec{v}_1 = \ell \dot{\theta}_1 \hat{e}_{\theta_1}, \quad (15)$$

donde \hat{e}_{θ_1} es un versor perpendicular a la soga conectada al techo. Para las otras dos partículas, escribiremos las velocidades con la ayuda de Galileo:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \ell \dot{\theta}_2 \hat{e}_{\theta_2}, \quad (16)$$

donde \hat{e}_{θ_2} es un versor perpendicular a la soga que sostiene a la partícula 2. Para la otra, obviamente, obtenemos una expresión análoga:

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \ell\dot{\theta}_3\hat{e}_{\theta_3}. \quad (17)$$

No está de más recordar que ningún problema hay con que θ_2 y θ_3 sean coordenadas medidas desde un sistema de referencia no inercial (la partícula 1), porque sólo son coordenadas generalizadas. Las tres velocidades las escribimos desde un sistema inercial (el punto fijo en el techo) y la energía cinética que obtengamos a partir de ellas estará medida desde dicho sistema. Al elevar las velocidades al cuadrado sólo bastará tener cuidado con los productos escalares entre versores distintos, que darán por resultado el coseno del ángulo entre los versores participantes. La energía cinética resulta:

$$T = \frac{m\ell^2}{2} \left[3\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 + 2\cos(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2\cos(\theta_3 - \theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \right]. \quad (18)$$

El potencial gravitatorio del sistema será la suma de los potenciales gravitatorios de cada partícula. Es cómodo fijar el 0 de los tres potenciales en el punto más bajo que pueden alcanzar los dos péndulos inferiores (es decir, a una distancia 2ℓ debajo del techo). Ayudándose con un dibujo, es fácil escribir las tres alturas y, luego de tirar los términos constantes, el potencial puede escribirse:

$$V = -mg\ell [3\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_3)]. \quad (19)$$

El lagrangiano del sistema en el régimen general y en términos de las coordenadas generalizadas y sus derivadas se obtiene simplemente escribiendo $\mathcal{L} = T - V$, donde T y V están en las dos ecuaciones anteriores.

La configuración de equilibrio estable del sistema es aquella con todas las sogas alineadas con el campo gravitatorio, es decir, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$. Para escribir el lagrangiano en el régimen de pequeñas oscilaciones en torno a dicho equilibrio, deberemos expandir tanto T como V a orden cuadrático en los ángulos y sus derivadas. Para V , basta saber que $\cos(x) \simeq 1 - x^2/2$ cuando x es pequeño, por lo que:

$$V \simeq \frac{mg\ell}{2} \left[3\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 \right], \quad (20)$$

donde nuevamente hemos omitido los términos constantes, pues no alteran la física del problema.

Para T , vale notar que los primeros tres términos en el corchete de la ecuación (18) ya son cuadráticos en las velocidades generalizadas y no requieren expansión alguna. Para los otros tres, tenemos funciones de las coordenadas multiplicando a factores que son cuadráticos en las velocidades generalizadas. Entonces, a orden cuadrático, sólo los términos correspondientes al

orden nulo de la expansión de las funciones que van multiplicando. Como todas esas funciones valen 1 al evaluarlas en la configuración de equilibrio, arribamos a:

$$T \simeq \frac{m\ell^2}{2} \left[3\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \right]. \quad (21)$$

Por comodidad, conviene tomar que las perturbaciones del equilibrio no son los ángulos sino las lóntitudes de arco, es decir, tomaremos al vector $\vec{\eta}$ como:

$$\vec{\eta} \equiv \begin{pmatrix} \ell\theta_1 \\ \ell\theta_2 \\ \ell\theta_3 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

y el lagrangiano aproximado resulta:

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^t \mathbb{T} \dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2} \vec{\eta}^t \mathbb{V} \vec{\eta}, \quad (23)$$

habiendo definido:

$$\mathbb{T} \equiv m \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{V} \equiv m\Omega^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

donde llamamos $\Omega^2 = g/\ell$. Notar que Ω no es otra cosa que la frecuencia de pequeñas oscilaciones de un péndulo simple de largo ℓ inmerso en un campo gravitatorio de magnitud g . Esto va a venir bien para interpretar cosas luego. Las ecuaciones de movimiento que se obtienen del lagrangiano anterior son:

$$\mathbb{T} \ddot{\vec{\eta}} = \mathbb{V} \vec{\eta} \quad (25)$$

que, al proponer soluciones dadas por modos normales $\vec{\eta}(t) = \vec{A} \exp(i\omega t)$, da lugar al ya viejo y conocido problema de autovectores y autovalores:

$$(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) \vec{A} = \vec{0}. \quad (26)$$

Para que la ecuación anterior tenga solución no trivial, pedimos que el determinante de $(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T})$ se anule. El polinomio característico asociado queda bastante simpático, dando lugar a tres frecuencias distintas que, ordenadas de menor a mayor, resultan:

$$\omega_1^2 = (3 - \sqrt{6})\Omega^2 \quad \omega_2^2 = \Omega^2 \quad \omega_3^2 = (3 + \sqrt{6})\Omega^2. \quad (27)$$

Para buscar los modos, tenemos dos opciones: el camino pragmático y cuentoso es reemplazar cada una de estas tres frecuencias en la ecuación (26) y despejar el vector de amplitudes \vec{A} de

cada modo (notar que, al reemplazar esas tres frecuencias, la matriz que multiplica al vector \vec{A} es, por construcción, singular; así que una de las tres ecuaciones lineales resulta redundante y los vectores de amplitud quedan definidos a menos de una constante de normalización, como ya sabemos). Un camino más reflexivo y un poco menos cuentoso requiere invocar un poco a nuestra intuición física. Vamos por este último.

La frecuencia intermedia (y su modo) podríamos haberla predicho de entrada. La partícula más cercana al techo puede mantenerse en reposo siempre y cuando las otras dos oscilen en contrafase. Cuando esto sucede, las dos de abajo no son otra cosa que dos péndulos simples independientes, así que oscilan con frecuencia Ω . Lo anterior nos permite inferir que el vector de amplitudes del modo intermedio tiene que ser:

$$\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Queda como ejercicio chequear que yendo por el camino pragmático y cuentoso llegan a la misma conclusión (a menos de un factor multiplicativo, claro).

Para los otros dos modos, podemos ahorrar algunas cuentas pidiéndole un poco más de esfuerzo a la imaginación: si la partícula de arriba se mueve, las dos de abajo deben hacer lo mismo (pues son indistinguibles entre sí). Más aún, el único modo posible que tenga a la masa de arriba quieta es el anterior, por lo que en ambos modos restantes la de arriba se mueve. Así que ambos deberían tener el aspecto:

$$\vec{A}_{1,3} = \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

donde $a_{1,3}$ los obtenemos reemplazando la propuesta anterior, junto con ω_1 u ω_3 , en la ecuación (26). Vale la pena notar que este tipo de propuestas no tienen por qué funcionar: uno puede ir a la ecuación de autovalores y darse cuenta de que la intuición falló; en ese caso hay dos opciones: probar otra propuesta imponiendo alguna forma específica del autovector como hicimos recién, o resignarse a dejar las tres componentes libres y que el álgebra nos diga la respuesta (no es grave, sólo son algunas cuentas más). Dicho esto, también está bueno notar que, dado que las masas inferiores son iguales y las longitudes de los hilos también, cuando estas se mueven juntas, el problema es indistinguible de el de un péndulo doble donde la masa superior vale m , la masa inferior vale $2m$ y la longitud de las sogas es ℓ . Lo que sea que obtengamos para los dos modos restantes tiene que corresponderse con los dos modos normales de dicho péndulo doble.

Reemplazando las propuestas anteriores en la ecuación de autovectores, obtienen:

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} +\sqrt{2/3} \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

para el modo de frecuencia menor, y:

$$\vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2/3} \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

para el modo de frecuencia mayor. Pueden chequear que las frecuencias asociadas a estos modos y la forma de los mismos son igualitos a las que se obtienen para un péndulo doble como el que describimos recién. Los movimientos del sistema en cada modo se esquematizan en la Fig. ??.

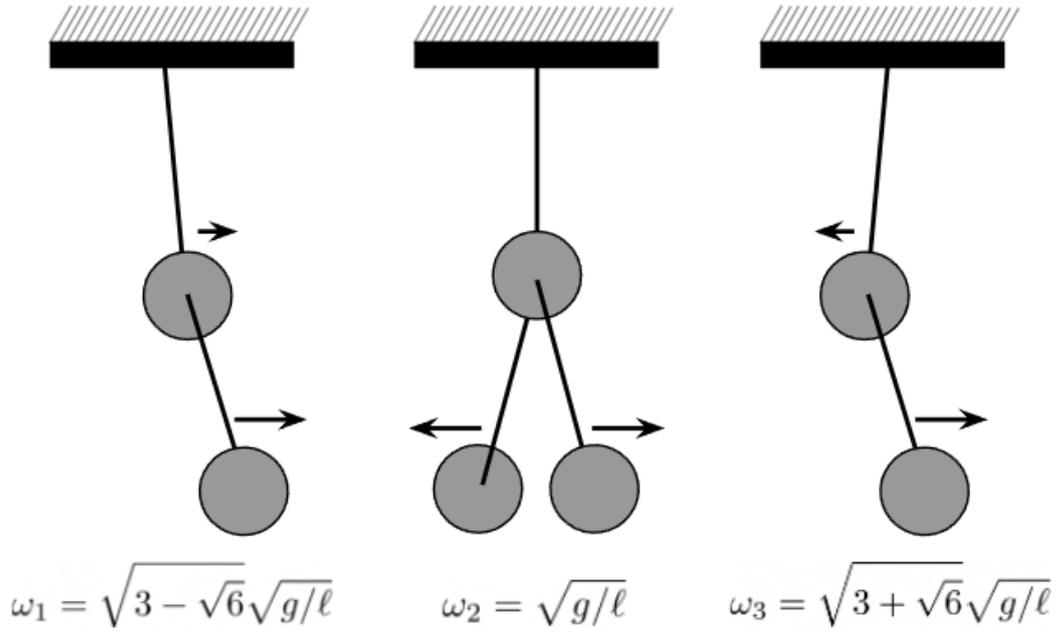


Figura 1: Modos normales.

La coordenada normal (sin normalizar) del modo intermedio se obtiene haciendo:

$$\zeta_2 = \vec{A}_2 \mathbb{T} \vec{\eta} = m(\eta_1 - \eta_2) = ml(\theta_2 - \theta_3), \quad (32)$$

de donde se ve que, cuando $\zeta_2 = 0$ (es decir, cuando el modo de frecuencia intermedia no fue excitado), las coordenadas de las dos partículas inferiores deben ser iguales. Notar que la condición $\eta_2 = \eta_3$ da lugar al plano generado por los autovectores de los otros dos modos, es decir, cuando el modo intermedio está apagado, el movimiento será una combinación lineal de los otros dos modos (y en dicha combinación las partículas de abajo siempre se mueven juntas).

3. Problema 3: tan masivo como fotogénico.

3.1. Inciso (a)

Para que las órbitas ligadas sean posibles, sabemos que es necesario que el potencial efectivo tenga al menos un mínimo local. Como nos piden que dichas órbitas no sean posibles, veamos qué condiciones necesitamos para que lo anterior **no suceda**. El potencial puede escribirse:

$$V_{\text{eff}}(r) = GMm \left(-\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r^3} \right), \text{ con } \alpha \equiv \frac{\ell^2}{2GMm^2} \text{ y } \beta \equiv \frac{\ell^2}{m^2 c^2}. \quad (33)$$

De entrada ya podemos ver que, siempre que $\ell \neq 0$, tendremos que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_{\text{eff}}(r) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}(r) = 0, \quad (34)$$

lo cual ya nos dice bastante sobre el aspecto del gráfico en el caso general.

Volviendo a lo de los extremos. derivamos e igualando a cero y obtenemos:

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2\alpha}{r^3} - \frac{3\beta}{r^4} = 0, \quad (35)$$

lo cual se convierte en una cuadrática multiplicando por r^4 . Las raíces son:

$$r = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 3\beta}, \quad (36)$$

que, si $\alpha^2 > 3\beta$, da lugar a dos raíces reales y positivas. Para que no haya extremos en valores reales y positivos del radio, entonces, necesitamos que el discriminante anterior resulte negativo. Escribiendo α y β en términos de los parámetros originales del problema, esto resulta:

$$\ell < \ell_c \equiv \frac{\sqrt{12}GMm}{c}. \quad (37)$$

Para esbozar el gráfico del potencial en estos casos, basta tener en mente los límites (34) y el hecho de que no hay extremos. El gráfico se puede ver en la Fig. 2. La interpretación de esto es bastante directa: si el momento angular no es lo suficientemente grande, sólo tenés una escapatoria: tener una energía lo suficientemente grande (mayor a cero) y condiciones iniciales convenientes para escapar del centro de fuerzas. En cualquier otro caso, el centro de fuerzas terminará comiéndote. Notar que en el problema de Kepler original esto no sucede: por más chico que sea tu momento angular (siempre y cuando no sea nulo), el potencial centrífugo eventualmente te expulsará si te acercás lo suficiente al centro de fuerzas.

Como la Tierra se encuentra en un movimiento ligado en torno al Sol, sabemos que necesariamente su momento angular orbital es mayor al valor crítico, es decir:

$$\ell_{\text{Tierra}} > \frac{\sqrt{12}GMm}{c} \simeq 9,16 \times 10^{36} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}. \quad (38)$$

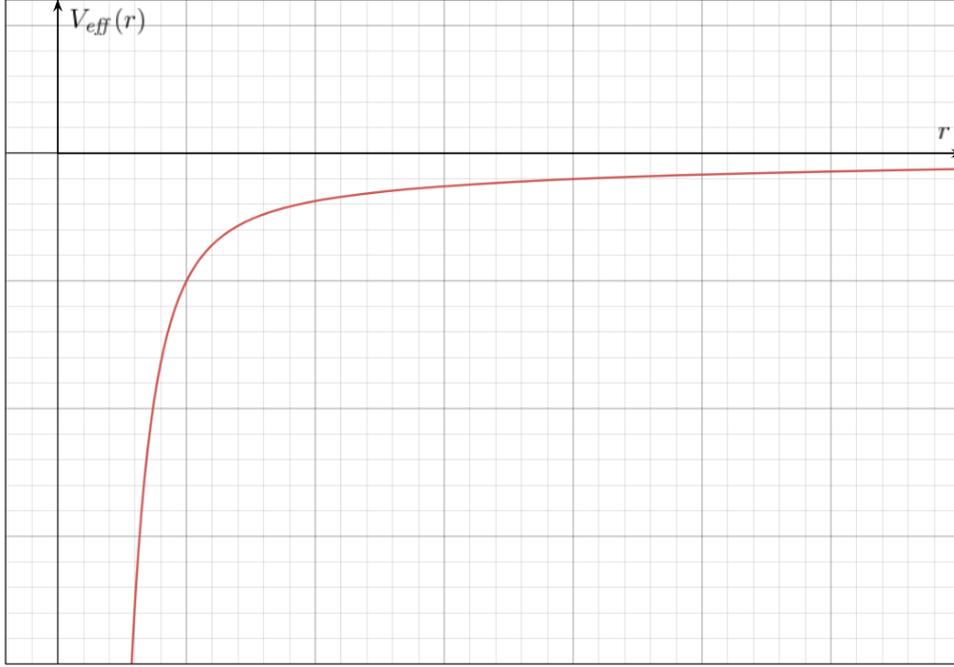


Figura 2: Potencial efectivo en el caso $l < l_c$.

3.2. Inciso (b)

Lo que nos piden mostrar en realidad ya lo mostramos: cuando $l > l_c$, el discriminante en (36) es positivo y además las dos raíces resultan positivas (porque la raíz del discriminante es menor que α). Para ver si son máximos o mínimos, uno podría verse tentado a derivar de vuelta; pero la respuesta nos la regalan los límites (34): el radio menor será un máximo y el otro un mínimo (¿por qué no pueden ser dos extremos indiferentes -es decir, ni máximos ni mínimos-?). Con esto, uno ya puede esbozar una versión bastante digna del potencial efectivo en el caso $l > l_c$; pero el análisis se puede poner un poco más puntilloso. Existen dos posibilidades, ambas compatibles con todo lo anterior, que son ligeramente distintas: el gráfico del potencial efectivo puede tener su valor máximo por encima del eje horizontal o por debajo del mismo. Para saber en cuál de las dos estamos, podemos preguntarnos si la función $V_{eff}(r)$ tiene o no raíces. Acá conviene volver a la primera expresión del potencial efectivo, en términos de α y β . Si igualan a cero y multiplican por r^3 obtienen una cuadrática, con raíces:

$$r = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}, \quad (39)$$

por lo que habrá dos raíces reales si $\alpha^2 > 4\beta$, o lo que es lo mismo, si $l > \frac{4GMm}{c} = \sqrt{\frac{4}{3}}l_c$. Tenemos, entonces, que si $l \in (l_c, \sqrt{4/3}l_c)$, el potencial efectivo tiene los dos extremos mencionados y se halla siempre por debajo del eje horizontal. Por otro lado, si $l \in (\sqrt{4/3}l_c, +\infty)$, el máximo se alcanza en valores positivos y el gráfico corta dos veces al eje horizontal. Las

dos opciones se muestran en la Fig. 3. Como es de esperar, los dos gráficos tienen un aspecto similar al obtenido en el caso kepleriano para valores grandes de r (de hecho, coinciden en ese límite). En ambos casos, podemos tener órbitas circulares: una inestable, la de radio menor, y otra estable, la de radio mayor. Es razonable que, si una tiene que ser inestable, sea la que está más cerca del centro de fuerzas.

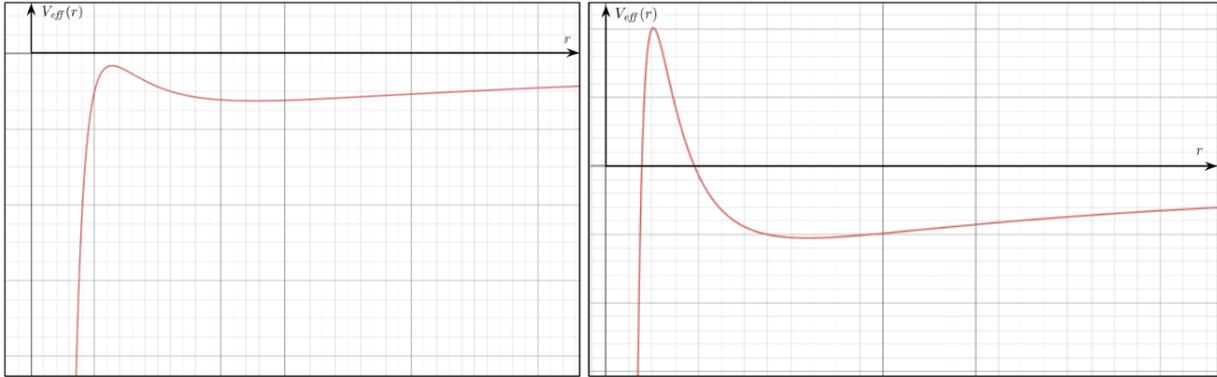


Figura 3: $V_{eff}(r)$ en el caso $\ell \in (\ell_c, \sqrt{4/3}\ell_c)$ (izquierda) y en el caso $\ell \in (\sqrt{4/3}\ell_c, +\infty)$ (derecha).

Veamos qué otras cosas podemos tener además de órbitas circulares. En el caso de la izquierda, cuando la energía se encuentra entre el valor máximo y mínimo (local) del potencial, podemos tener órbitas ligadas u órbitas que colapsen al centro de fuerzas pasando por un punto de máximo alejamiento. Si la energía es positiva, igual que en el inciso anterior, podemos caer al centro de fuerzas o escapar al infinito dependiendo de las condiciones iniciales. Una peculiaridad de este caso es que existe un rango de energías negativas (entre el máximo del potencial y cero) para las cuales la partícula tendrá un punto de máximo alejamiento y luego, irremediamente, caerá al centro de fuerzas.

En el otro caso no tenemos esa última novedad, pero tenemos otra: existe un rango de energías positivas (entre cero y el valor máximo del potencial) para las cuales, dependiendo de las condiciones iniciales, podríamos caer al centro de fuerzas pasando por un punto de máximo alejamiento o escapar al infinito pasando por un punto de máximo acercamiento.

3.3. Inciso (c)

Lo que podemos hacer con los datos que tenemos es igualar la energía mecánica en el pericentro y en el apocentro (en ambos casos, $\dot{r} = 0$, así que la energía coincide con el potencial efectivo en esos puntos). Antes, recordemos que el momento angular en dichos puntos se escribe

ℓmrv (pues toda la velocidad es tangencial). Con esto en mente, la igualación de energías queda:

$$-\frac{GMm}{r_p} + \frac{m^2 r_p^2 v_p^2}{2mr_p^2} - \frac{GMm^2 r_p^2 v_p^2}{mc^2 r_p^3} = -\frac{GMm}{r_a} + \frac{m^2 r_a^2 v_a^2}{2mr_a^2} - \frac{GMm^2 r_a^2 v_a^2}{mc^2 r_a^3}, \quad (40)$$

donde r_p y v_p son la distancia y la velocidad en el perihelio, mientras que r_a y v_a son esas variables en el apocentro. Desde el punto de vista matemático, el problema ya está resuelto: la ecuación anterior sólo tiene a M como incógnita, es cuestión de despejarla. Después de algo de álgebra, obtenemos:

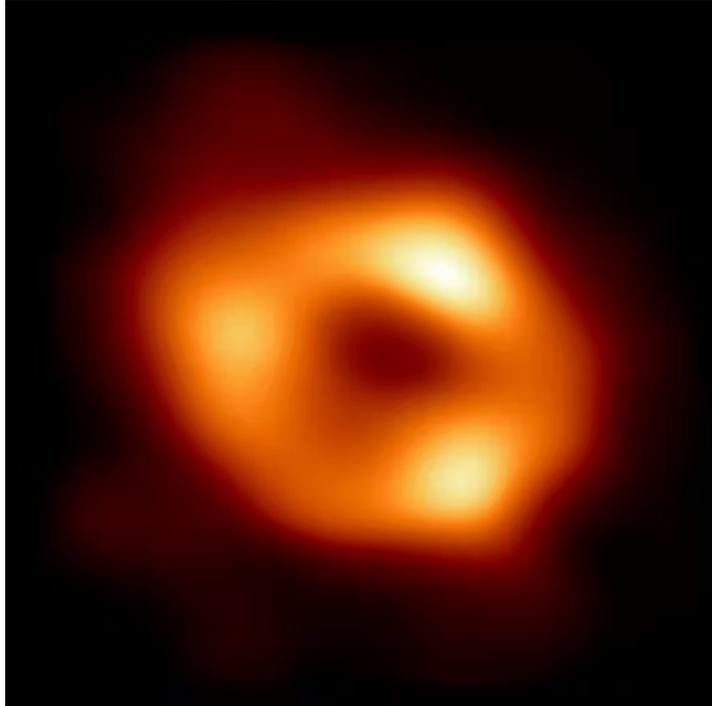
$$M = \frac{1}{2G} [v_p^2 - v_a^2] \left[\frac{(1 + (v_p/c)^2)}{r_p} - \frac{(1 + (v_a/c)^2)}{r_a} \right]^{-1}. \quad (41)$$

Algo notable de la expresión anterior es que, como $v_p \gg v_a$ y $r_p \ll r_a$, en ambos corchetes dominan por afano los términos correspondientes al pericentro, así que la masa de nuestro fotogénico agujero negro se puede aproximar bastante bien usando sólo la información del pericentro de la órbita de $S2$, es decir:

$$M \simeq \frac{v_p^2 r_p}{2G (1 + (v_p/c)^2)}, \quad (42)$$

que, al evaluar en los datos, da la bestial cifra de 3,63 millones de masas solares.

Esto último es sólo una observación simpática porque, dado que teníamos todos los datos, tranquilamente podíamos usar la expresión (41) para ser más precisxs. Les queda a ustedes.



4. Problema 4: los tiros verticales pueden ser divertidos.

4.1. Inciso (a)

De la condición $y(0) = 0$ concluimos que $A = 0$, mientras que en el otro extremo obtenemos $\ell \sin(\omega\tau) = 0$; de donde podemos concluir que, o bien, $\ell = 0$, o bien $\sin(\omega\tau) = 0$. La primera opción anula toda dependencia temporal y nos deja con una familia de soluciones trivial (todas nulas), por lo que la única opción razonable es que $\ell \neq 0$ y que $\sin(\omega\tau) = 0$. De esto último, uno podría verse tentado a decir que $\omega = 2\pi/\tau$, pero ¡cuidado!: esto da lugar a una familia de soluciones oscilatorias de período τ , es decir, soluciones en las cuales la partícula sube y baja entre 0 y $\tau/2$; para luego incursionar en un viaje subterráneo entre $\tau/2$ y τ que concluye en la altura inicial. Desde luego que este no es el tipo de soluciones que buscamos y a eso apuntaba la ayuda: la ecuación $\sin(\omega\tau) = 0$ no determina unívocamente ω , pues tenemos infinitas opciones:

$$\omega\tau = k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}. \quad (43)$$

Todas son igualmente válidas desde un punto de vista formal: el principio de Hamilton sólo nos pide que fijemos los extremos. Pero no somos robots: como cualquier entidad con alma, de todas las opciones nos quedamos con la que mejor se adapta a la situación física que buscamos describir. Tomamos entonces $k = 1$ en la ecuación quedándonos con una subfamilia de trayectorias en las que la partícula sube hasta alcanzar una altura máxima en $\tau/2$ y vuelve al piso en τ . Habiendo impuesto las condiciones de extremos fijos, nuestra familia queda parametrizada por una única variable, ℓ , es decir: $y_{pp}(t) = \ell \sin(\pi t/\tau)$ (el subíndice refiere a que esta es la solución buscada por la persona poco pragmática, para no confundir luego con la solución exacta que encontraremos en el siguiente ítem). El principio de Hamilton nos dirá cuál de todos los valores de ℓ corresponde al miembro de la familia que mejor se aproxima a la trayectoria real de la partícula. Para ello, escribiremos la acción evaluada en este tipo de trayectorias y, para ello, necesitamos el lagrangiano. El movimiento es unidimensional y nuestra coordenada generalizada será, obviamente y . La energía cinética sabemos como se escribe y, para la potencial, notemos que la partícula se mueve en un campo gravitatorio $\vec{g} = -\gamma t \hat{e}_y$, por lo que $V(y) = m\gamma ty$, así que el lagrangiano, evaluado en $y_{pp}(t)$ resulta:

$$\mathcal{L}(\ell, t) = \frac{m\ell^2\pi^2}{2\tau^2} \cos^2(\pi t/\tau) - m\gamma\ell t \sin(\pi t/\tau), \quad (44)$$

donde hacemos explícito el hecho de que, una vez evaluado en la parametrización propuesta, el lagrangiano resulta una función únicamente del tiempo y de los parámetros de nuestra familia

(en este caso, únicamente ℓ). La acción se obtiene integrando entre los extremos de la trayectoria:

$$S[y_{pp}(t)] = S(\ell) = \frac{m\pi^2}{4\tau}\ell^2 - \frac{m\gamma\tau^2}{\pi}\ell, \quad (45)$$

es decir, la funcional de acción, evaluada en la parametrización propuesta, resulta una función real de los parámetros (en ese caso, únicamente ℓ), como es de esperar.

4.2. Inciso (b)

La parte más ardua del trabajo ya está hecha. Hamilton nos dice que la trayectoria real es, de todas las trayectorias posibles, aquella que hace extrema a la acción. Si queremos buscar la mejor aproximación dentro de un subconjunto de trayectorias, entonces, buscamos un extremo de la acción en dicho conjunto. Dado que en este caso la acción quedó parametrizada por una única variable, el problema se reduce al de encontrar un extremo de una función real:

$$\frac{dS}{d\ell} = \frac{m\pi^2}{2\tau}\ell - \frac{m\gamma\tau^2}{\pi} = 0 \Leftrightarrow \ell = \frac{2\gamma\tau^3}{\pi^3}, \quad (46)$$

por lo que la solución aproximada, según el principio de Hamilton, es:

$$y_{pp}(t) = \frac{2\gamma\tau^3}{\pi^3} \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right). \quad (47)$$

Es evidente que la altura máxima, según esta solución, es $\frac{2\gamma\tau^3}{\pi^3}$ y se alcanza en $\tau/2$.

Para encontrar la solución exacta, simplemente notamos que:

$$\ddot{y}(t) = -\gamma t \Rightarrow \dot{y}(t) = -\frac{\gamma}{2}t^2 + v_0 \Rightarrow y(t) = -\frac{\gamma}{6}t^3 + v_0 t + y_0, \quad (48)$$

donde y_0 y v_0 son las constantes de integración, a ser determinadas por las condiciones de borde.

Como $y(0) = 0$, tenemos que $y_0 = 0$. Para hallar v_0 , podemos usar que $y(\tau) = 0$:

$$0 = -\frac{\gamma}{6}\tau^3 + v_0\tau \Rightarrow v_0 = \frac{\gamma\tau^2}{6}, \quad (49)$$

por lo que la solución exacta resulta:

$$y(t) = \frac{\gamma t}{6} (\tau^2 - t^2), \quad (50)$$

que, desde luego, es un polinomio de grado tres que se anula en $t = 0$ y vuelve a anularse en $t = \tau$. El instante en el cual la altura máxima es alcanzada puede sacarse fácilmente igualando a cero la expresión para $\dot{y}(t)$, obteniéndose $t_{max} = \tau/\sqrt{3}$. Como es de esperar, este instante es mayor a $\tau/2$, porque el campo gravitatorio crece con el tiempo, haciendo que el tiempo que demora la partícula en llegar al punto más alto sea menor de lo que demorará en regresar al

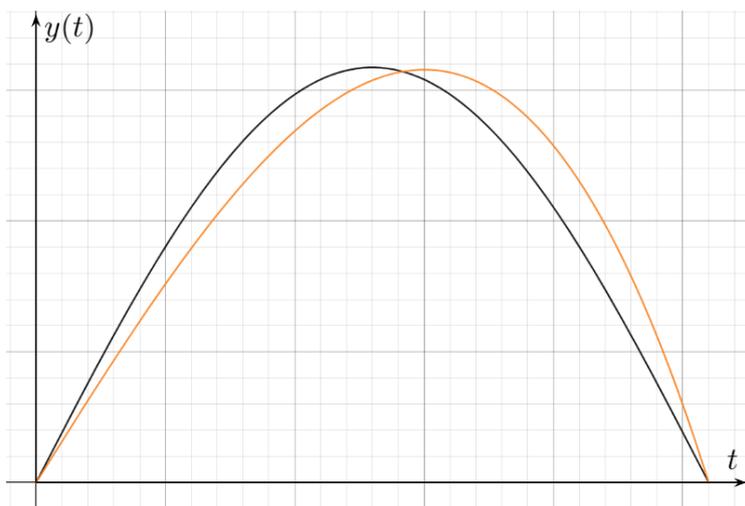


Figura 4: Solución exacta (en naranja) y aproximada (en negro).

suelo desde dicho punto. Para comparar el aspecto de la solución exacta con la aproximada, en la Fig. 4 tenemos los gráficos de ambas para ciertos valores de γ y de τ .

Para ver por cuánto le pifia la persona poco pragmática en el tiempo que demora la partícula en alcanzar su altura máxima, podemos hacer:

$$\frac{t_{max,pp}}{t_{max}} = \frac{1/2}{1/\sqrt{3}} \simeq 0,87, \quad (51)$$

o sea que subestima el tiempo de altura máxima por algo así como un 13%. La altura máxima exacta se obtiene evaluando:

$$y(t_{max}) = \frac{\gamma\tau}{6\sqrt{3}}\tau^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\gamma\tau^3\sqrt{3}}{27}, \quad (52)$$

mientras que la altura máxima obtenida por la persona poco pragmática era $\frac{2\gamma\tau^3}{\pi^3}$. Nuevamente, tomamos el cociente para comparar:

$$\frac{y_{max,pp}}{y_{max}} = \frac{2 \times 27}{\sqrt{3}\pi^3} \simeq 1,006, \quad (53)$$

con lo que sobreestima la altura máxima tan solo por un 0,6%. Bastante digno. Como corolario de lo anterior, y para los que dicen que lo que aprendemos en esta carrera no tiene aplicaciones en el mundo real, noten lo siguiente: la próxima vez que se encuentren en una isla desierta, despojados de toda clase de tecnología, y necesiten calcular el producto entre la raíz de tres y pi al cubo, sabrán que da casi lo mismo que dos por veintisiete.