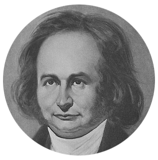

Mecánica Clásica - 2do. cuatrimestre de 2020

Guía 8: *Ecuación de Hamilton-Jacobi y variables de ángulo acción.*

1. Considerá un sistema físico cuya energía cinética es $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(q_1^2 + q_2^2)$ y cuya energía potencial resulta $V = (q_1^2 + q_2^2)^{-1}$, donde q_1, q_2, $\dot{q}_1$ y $\dot{q}_2$ son coordenadas y velocidades generalizadas. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi para este sistema? Resolvé esta ecuación para encontrar la función principal de Hamilton S. Deducí de allí el comportamiento dinámico del sistema.

2. Considerá el movimiento unidimensional de un pingüino de masa m y carga q sometido a una campo eléctrico uniforme dependiente del tiempo $E(t)$. Encontrá el hamiltoniano del sistema. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi? Mostrá que la función principal de Hamilton puede escribirse como

$$S = xe \int_0^t E(t')dt' + \alpha x - \phi(t),$$

donde α es una constante y ϕ es una función del tiempo. Resolvé la ecuación para ϕ. Para el caso en el que $E(t) = kt$; encontrá la posición y el momento canónico conjugado en función del tiempo.

3. Un pingüino de masa m se mueve sobre el eje x sometido a un potencial $V = a \sec^2(x/l)$, con a y l constantes. Resolvé la ecuación de H–J encontrando una expresión integral para S. Hallá $x(t)$.

4. Para un pingüino sujeto a un resorte que se mueve en una dimensión (oscilador armónico):

   (a) Hallá el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton. Repasá los diagramas de fase.

   (b) Hallá la trasformación canónica de función generatriz $F_1(Q, q) = \lambda q^2 \cot Q$ eligiendo λ para que el nuevo hamiltoniano sea $K(Q, P) = \omega P$, donde ω es la frecuencia del oscilador.

   (c) Mostrá que (Q, P) son variables de ángulo–acción. Hallá el área encerrada por las curvas de E (energía) constante en el espacio de fases, y compará con el área encerrada por las del ítem (a).

   (d) Hallá la generatriz $F_2(P, q)$ que da lugar a la misma transformación. ¿Qué relación tiene con F_1?

5. Mostrá que la generatriz de la transformación canónica que lleva a variables de ángulo-acción es $F_2(q, J) = \int^q p(J, q')\, dq'$. Probá que $F_2(q, J)$ *no* es periódica como función de q, pero que $F_1(q, Q)$ *sí*.

6. Considerá el hamiltoniano $H = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2$. Resolvé el problema utilizando la técnica de Hamilton–Jacobi. Encontrá la órbita general de la solución de la ecuación de H–J. ¿Qué sistema físico podría corresponder a este problema? Resolvé este problema de otras tres maneras:

   (a) Escribiendo y resolviendo las ecuaciones canónicas.

   (b) Haciendo una transformación canónica con $Q_1 = Ap_1$, $P_1 = B(p_2 - kq_1)$, eligiendo Q_2 y P_2 convenientemente (A y B son constantes), resolviendo para Q_i y P_i y luego antitransformando.

   (c) Por medio de variables de ángulo–acción.

7. Considerá un péndulo físico, es decir, un pingüino real[*] que puede moverse en un plano vertical con algún punto fijo sobre su eje de simetría (sí, este pingüino tiene un eje de simetría). El momento de inercia del pingüino respecto al punto fijo es I. Hay gravedad.

   (a) Mostrá que el hamiltoniano del sistema es $H = \frac{1}{2}I(p_\psi^2 - 2\alpha^2 \cos\psi)$ donde ψ es el ángulo de la barra con la vertical, p_ψ su momento conjugado y α una constante a determinar.

   (b) Armá los diagramas de fase. Hallá puntos de equilibrio y discutí su estabilidad. Obtené la curva separatriz y dibujala. Determiná los movimientos de libración y rotación posibles y sus períodos.

   (c) Mostrá que el área encerrada por la separatriz es 16α. Concluí que el máximo valor de la variable de acción para el movimiento de libración es $8\alpha/\pi$.

8. Un pingüino de masa m se mueve en el potencial $V(x) = \frac{m\lambda^2}{2}\left(|x| - a\right)^2$. Obtené las ecuaciones de Hamilton y dibujá los diagramas de fase, prestando especial atención a los cercanos al origen. Mostrá que el espacio de fases se divide en 3 regiones invariantes, y en cada una se definen distintas variables de ángulo–acción. Hallá la variable de acción en función de E en cada caso.

9. Considerá una partícula con hamiltoniano $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ para cada uno de los siguientes casos: $V(q) = -k^2/q + l^2/2mq^2$ y $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + l^2/2mq^2$.

   (a) Dibujá los diagramas de fase, escribí las ecuaciones de las curvas separatrices e indicá las regiones que corresponden a movimientos de libración y rotación.

   (b) Para los movimientos de libración, escribí la variable de acción en función de la energía y hallá la relación $\psi = \psi(q, J)$, donde ψ es la variable de ángulo. ¿Cuál es la frecuencia del movimiento?

   (c) Encontrá la energía de las trayectorias con $J = n\hbar$ y $l = p\hbar$ (n, p números naturales; $\hbar$ constante). Discutí este punto con la almohada, con tus compañerxs y con tus docentes (en ese orden).

10. Escribí las variables de acción y ángulo para las el pingüino del problema 7, pero ahora sometido a un potencial: $V(\psi) = k|\psi|/\pi$ si $-\pi < \psi < \pi$ ($k > 0$), con $V(\psi)$ periódico, $V(\psi + 2\pi) = V(\psi)$.

11. Una partícula se mueve en el espacio bajo la acción de un potencial central $V(|\mathbf{r}|)$.

   (a) Calculá las variables de acción para la parte angular del movimiento. ¿Cómo se expresa el módulo del momento angular como función de las mismas?

   (b) ¿Bajo qué condiciones el movimiento será periódico? Mostrá explícitamente que para el problema de Kepler y para el oscilador armónico el movimiento *es* periódico pero que para un potencial de la forma $V = a/r^2$ no lo es. Hallá la frecuencia de movimiento como función de la energía.

   (c) ¿Cuál es la energía de las órbitas definidas por las relaciones $J_i = n_i\hbar$? ¿Cuánto vale el momento angular de las mismas? (n_i entero y $\hbar$ constante).

12. Para $V(q) = \epsilon(1 - \alpha/q)^2$, dibujá el diagrama de fases indicando las zonas de libración. Calculá las variables de ángulo y acción $J = J(E)$ y $\psi = \psi(q, J)$. ¿Qué pasa con el período del movimiento cuando la energía tiende al valor que corresponde a la curva separatriz?

[*] Es decir, un pingüino no puntual; no es que el pingüino viva sin laburar porque tenga sangre azul.