

Mecánica Clásica (B). Primer cuatrimestre de 2022.

Resolución del segundo parcial.

Ignacio Perito (iperito@df.uba.ar)

1. Problema 1: la paradoja de los gemelos.

1.1. Inciso (a)

Tenemos la posición de la nave con respecto a la Tierra, así que para obtener la velocidad simplemente derivamos:

$$v(t) = \frac{\pi L}{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad (1)$$

de donde ya vemos que la máxima velocidad que alcanzará la nave -respecto de la Tierra- será $v_0 \equiv \frac{\pi L}{T}$. De pedir que esto sea menor a c , obtenemos $L < cT/\pi$. Si τ es el tiempo propio de la gemela viajera, sabemos los incrementos temporales de los relojes de ambos hermanxs se relacionan según la ya vieja, conocida, y queridísima fórmula de dilatación temporal:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(t)} = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt = \sqrt{1 - \beta_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)} dt, \quad (2)$$

donde hemos definido $\beta_0 \equiv v_0/c$. La duración del periplo, según la gemela, es entonces:

$$\mathcal{T} = \int_0^T \sqrt{1 - \beta_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)} dt, \quad (3)$$

que es lo que les pedíamos. Vale notar que este tipo de integrales forman parte de la tenebrosísima familia de integrales elípticas pero, en ciertos casos particulares, resultan simpáticas. De eso se trata el segundo inciso. Por el momento, puede sacarnos algo de miedo pensar a \mathcal{T} como el área bajo la curva de la función $f_{\beta_0}(t) \equiv \sqrt{1 - \beta_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}$ entre $t = 0$ y $t = T$. En la Figura 1 se ven algunos casos.

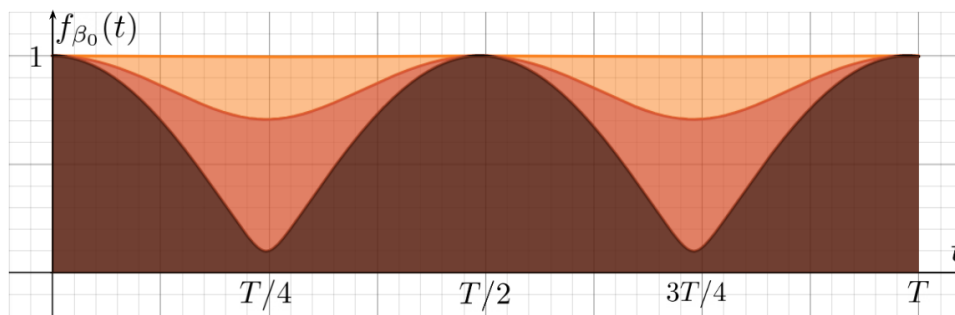


Figura 1: Función $f_{\beta_0}(t)$ para $\beta_0 = 0,01$ (naranja); $\beta_0 = 0,5$ (rojo) y $\beta_0 = 0,99$ (negro). En cada caso, el área bajo la curva coincidirá con la duración del viaje según la gemela viajera.

1.2. Inciso (b)

El caso no relativista corresponde al caso en que la máxima velocidad de la nave está lejos de hacerle cosquillas a las transformaciones de Galileo. Matemáticamente, estamos en el límite $\beta_0 \rightarrow 0$. En este caso, el integrando en la ecuación (3) es prácticamente 1 y obtenemos, como es de esperar, que $\mathcal{T} \rightarrow T$. En el caso ultra-relativista, la nave alcanza velocidades arbitrariamente cercanas a la de la luz, con lo cual $\beta_0^2 \rightarrow 1$, y la identidad pitagórica hace que la integral (3) se vuelva simpaticuísima:

$$\mathcal{T} = \int_0^T \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)} dt = \int_0^T \left| \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right| dt = 4 \int_0^{T/4} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt = \frac{2T}{\pi}, \quad (4)$$

donde en el anteúltimo paso aprovechamos el aspecto de la función $|\cos(\frac{2\pi}{T}t)|$ (pensar en el caso $\beta_0 \rightarrow 1$ en la Figura 1) para simplificar las cuentas. La razón por la cual \mathcal{T} no puede ser arbitrariamente pequeño (en el caso más extremo tendremos $\mathcal{T} = (2/\pi)T \simeq 0,64T$), es que incluso en el caso ultrarelativista, la velocidad de la nave oscila entre 0 y su valor máximo, por lo que habrá fragmentos del viaje en los cuales la dilatación temporal no será considerable. Matemáticamente, esto lo podríamos haber anticipado en la Figura 1, puesto que allí ya vemos que el área bajo la curva es finita incluso en el caso no relativista.

1.3. Inciso (c)

En el sistema fijo a la Tierra, el evento asociado a la gemela emprendiendo el regreso tiene coordenadas $ct = cT/2$ y $x = L$. La última imagen que ve la gemela antes de emprender el regreso corresponde, entonces, a la luz que sale de la Tierra ($x = 0$) y llega a $x = L$ en $t = T/2$. Como es luz, el tiempo que demora en llegar es L/c , por lo que la última imagen que ve la gemela antes de comenzar el regreso corresponde al instante terrestre $\tilde{t} = T/2 - L/c$. Esto último es más fácil de analizar si lo escribimos en términos de T y β_0 :

$$\tilde{t} = \left(1 - \frac{2\beta_0}{\pi}\right) \frac{T}{2}, \quad (5)$$

de donde vemos que en el caso no relativista ($\beta_0 \rightarrow 0$), como es de esperar, tenemos $\tilde{t} \rightarrow T/2$. En el caso ultra-relativista ($\beta_0 \rightarrow 1$), en cambio, tenemos $\tilde{t} \rightarrow (1 - 2/\pi)T/2 \simeq 0,18T$.

1.4. Inciso (d)

Si el viaje es ultra-relativista, tenemos $\beta_0 = \pi L/cT \rightarrow 1$, por lo que la distancia alcanzada por la gemela viajera, respecto de la Tierra, será $L \simeq cT/\pi \simeq 0,32cT$. Como $T = 10$ años, la distancia de máximo alejamiento de la gemela, según lo ve su hermano, serán 3,2 años luz. Mientras que la imagen de la Tierra que llega a sus ojos cuando emprende su regreso es de

$t = 1,8$ años después de su partida. Todo esto se puede esquematizar en un diagrama de Minkowski como el que se ve en la Figura 2.

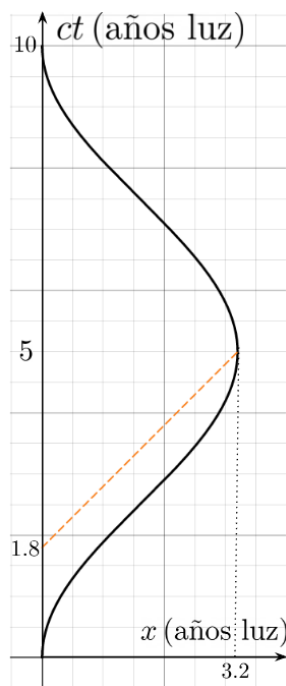


Figura 2: Línea de universo de la gemela viajera y del rayo de luz que llega a sus ojos desde la Tierra al detenerse. El diagrama corresponde a las coordenadas espaciotemporales del gemelo terráqueo.

El párrafo anterior nos permite ver algo curioso: de los 10 años de historia terrestre en los cuales la gemela está ausente; ella ve los primeros 1,8 en su viaje de ida y los 8,2 restantes en su regreso. Por la simetría del problema, está claro que, según el reloj de la gemela, su viaje de ida demora lo mismo que su viaje de vuelta; por lo que la historia terrestre, en sus ojos, se ve ralentizada durante la ida y acelerada durante la vuelta. Además, la luz proveniente de la Tierra se verá *corrida al rojo* en la ida, mientras que *corrida al azul* durante la vuelta. Ambos fenómenos (cambios en la *velocidad de reproducción* y en la *tonalidad* de la película terrestre) no serán uniformes si no que se verán intensificados en los tramos del viaje de mayor velocidad. De hecho, en los fragmentos en los que la nave alcanza velocidades muy altas, el corrimiento de frecuencias será tan alto que la luz que llega a los ojos de la gemela se saldrá del espectro visible, por lo que la viajera no verá nada donde debería estar nuestro planeta.

Las últimas preguntas son las más fáciles de responder con lo que ya tenemos: como se separaron en su cumpleaños número 20 y el gemelo se quedó en la Tierra, este estará cumpliendo 30 años al momento del reencuentro. Para la gemela pasaron $\mathcal{T} \simeq 6,4$ años, por lo que tendrá un poco más de 26 años y 7 meses al aterrizar. No sólo es más joven, sino que su cumpleaños se desplazó 5 meses, por lo que los gemelos deberán preguntarle al idiota del pueblo qué tienen que hacer con la carta astral que se les asignó previamente.

2. Problema 2: llegó un telegrama de Greenpeace

Llamaremos \hat{e}_3 al versor que está fijo al eje de simetría del pingüino (que, como tal, es un eje principal), como se ve en la Figura 3. Notar que en el plano perpendicular a \hat{e}_3 , el tensor de inercia está degenerado, por lo que será diagonal en cualquier base ortogonal que incluya a \hat{e}_3 . Ayudándonos con las expresiones de los momentos de inercia para un elipsoide homogéneo, podemos ver que, con respecto al centro de masa, el momento de inercia en la dirección \hat{e}_3 es $I_3 = \frac{m}{5} \left(\frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{4} \right) = \frac{m\ell^2}{10}$; mientras que en las otras dos direcciones coinciden y valen $I = \frac{m}{5} \left(\frac{\ell^2}{4} + \ell^2 \right) = \frac{m\ell^2}{4}$. El centro de masa del pingüino está en su centro (pues es un elipsoide homogéneo); así que se mantiene siempre a una distancia ℓ del punto de enganche. Dicho todo esto, pasamos las consignas.

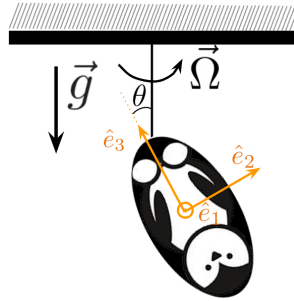


Figura 3: Elección de ejes para el movimiento del pingüino.

2.1. Inciso (a)

El sistema tiene dos grados de libertad, y las coordenadas generalizadas más naturales son el ángulo θ que marcamos en la Figura 3 y el ángulo ψ asociado a la rotación del pingüino sobre su propio eje. Es fácil ver que estos dos ángulos coinciden con los ángulos de Euler de igual nombre, pero el problema puede plantearse tranquilamente sin hacer mención alguna de la parametrización de Euler. Para escribir el lagrangiano, resulta cómodo pararse en el punto de donde se enganchan los piececillos del pingüino, así que eso haremos. Otra cosa que haremos es aprovechar la degeneración en el plano perpendicular al eje del pingüino para tomar el eje \hat{e}_2 de manera que siempre quede contenido en el plano generado por el eje \hat{z} y el eje \hat{e}_3 (de esta manera, la descomposición del vector $\vec{\Omega}$ será un poco más amigable).

Sabemos que la energía cinética puede descomponerse como:

$$T = \frac{m}{2} |\vec{v}_{cm}|^2 + \frac{I}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{I_3 \omega_3^2}{2}, \quad (6)$$

donde \vec{v}_{cm} es la velocidad del centro de masa y ω_i es la componente i -ésima de la velocidad angular intrínseca del pingüino en la dirección del eje principal i -ésimo, tal como los definimos hace un rato. Para \vec{v}_{cm} , dado que el centro de masa siempre está a distancia ℓ del punto de

enganche, podemos usar la expresión de la velocidad en coordenadas esféricas (con $\dot{\phi} = \Omega$) o bien mirar con algo de cariño la Figura 3. Sea cual sea el camino, llegamos a que:

$$\vec{v}_{cm} = \ell\dot{\theta}\hat{e}_2 - \ell\Omega\sin\theta\hat{e}_1 \Rightarrow |\vec{v}_{cm}|^2 = \ell^2 \left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta \right). \quad (7)$$

Por otro lado, la velocidad angular del pingüino tiene la contribución constante de módulo Ω en la dirección z y las contribuciones $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ cuyas direcciones se pueden ver en la Figura 3:

$$\vec{\omega} = \Omega\hat{z} + \dot{\theta}\hat{e}_1 + \dot{\psi}\hat{e}_3 = \dot{\theta}\hat{e}_1 + \Omega\sin\theta\hat{e}_2 + \left(\Omega\cos\theta + \dot{\psi} \right) \hat{e}_3, \quad (8)$$

donde en el último paso simplemente descompusimos el eje \hat{z} en los ejes principales que hemos elegido (¡sólo \hat{e}_3 está fijo al pingüino!). Quienes hayan trabajado con tres ejes fijos al pingüino, habrán llegado a una expresión un poco más extensa de $\vec{\omega}$; pero a la hora de escribir la energía cinética deberíamos estar de acuerdo en que resulta:

$$T = \frac{m\ell^2}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{m\ell^2}{8} \left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{m\ell^2}{20} \left(\Omega \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2, \quad (9)$$

donde el primer término es la contribución del centro de masa y los otros dos son los de rotación en torno al mismo (ya hemos usado las expresiones explícitas para los momentos de inercia). El potencial es sencillo porque el centro de masa está obligado a mantenerse siempre a una distancia ℓ del origen que elegimos, como un péndulo esférico:

$$V = mg\ell(1 - \cos \theta). \quad (10)$$

Las dos ecuaciones anteriores nos dejan al lagrangiano servido en bandeja:

$$\mathcal{L} = \frac{m\ell^2}{2} \left[\frac{5\dot{\theta}^2}{4} + \frac{5\Omega^2 \sin^2 \theta}{4} + \frac{\left(\Omega \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2}{5} \right] + mg\ell \cos \theta, \quad (11)$$

donde hemos agrupado términos en la energía cinética y hemos sacado de la escena al término constante del potencial gravitatorio por no influir en la dinámica del problema.

Como el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, la función de energía (mejor conocida como *el hamiltonianito*) se conserva. No lo preguntábamos, pero es sencillo ver que el hamiltonianito no es igual a la energía mecánica del problema (la energía cinética no es homogénea de grado 2 en las velocidades generalizadas). De hecho, la energía mecánica no se conserva porque el eje y su motor ejercen trabajo sobre el ave. Por otro lado, la variable ψ resulta cíclica, así que su momento conjugado p_ψ es otra constante de movimiento del problema. Este último es sencillo de escribir:

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{m\ell^2}{5} \left(\Omega \cos \theta + \dot{\psi} \right) = \frac{m\ell^2 \omega_3}{5}, \quad (12)$$

donde en el último paso hemos usado que la cantidad entre paréntesis no es otra cosa que la componente de $\vec{\omega}$ paralela al eje \hat{e}_3 -ver ecuación (8)-. Como p_ψ es una constante de movimiento y difiere de ω_3 únicamente en un factor multiplicativo también constante, tenemos que ω_3 se conserva a lo largo del movimiento, que es otra cosa que nos pedían mostrar.

2.2. Inciso (b)

Aún no escribimos ninguna de las cantidades conservadas pero, como ψ es cíclica, sabemos que la función de energía tendrá la dependencia $h = h(\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi})$. Por otro lado, p_ψ es una constante de movimiento, lo cual nos permitirá escribir $\dot{\psi}$ en términos de cosas que no son $\dot{\psi}$. Aprovechando estas dos cosas, tiene que ser posible (tal vez cuentoso, pero posible) reducir el problema a uno unidimensional equivalente (es decir, expresar la conservación de h como una ecuación de balance que sólo involucre a θ y a su derivada). Veamos.

El momento canónico conjugado de la variable ψ es sencillo de escribir:

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{m\ell^2}{5} \left(\Omega \cos \theta + \dot{\psi} \right) \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{5p_\psi}{m\ell^2} - \Omega \cos \theta, \quad (13)$$

mientras que, por definición, la función de energía es $h = \dot{\theta}p_\theta + \dot{\psi}p_\psi - \mathcal{L}$, con:

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{5m\ell^2\dot{\theta}}{4}. \quad (14)$$

Si escribimos h , luego de agrupar cosillas y omitir las constantes, obtenemos:

$$\hat{h} = \frac{5m\ell^2\dot{\theta}}{4} - p_\psi\Omega \cos \theta - \frac{5m\ell^2\Omega^2 \sin^2 \theta}{8} - mgl \cos \theta \equiv T_{eff} + V_{eff}(\theta), \quad (15)$$

donde llamamos \hat{h} a la función de energía luego de volar las constantes. También hemos definido $T_{eff} \equiv \frac{5m\ell^2\dot{\theta}}{4}$, mientras que:

$$V_{eff}(\theta) \equiv -\frac{5m\ell^2\Omega^2 \sin^2 \theta}{8} + (mgl + p_\psi\Omega) \cos \theta. \quad (16)$$

De esta manera, el problema ya quedó reducido a uno unidimensional equivalente, gobernado por la ecuación de balance $T_{eff} + V_{eff}(\theta) = cte$. Los equilibrios corresponden a los extremos del potencial efectivo, así que derivamos e igualamos a cero:

$$\frac{dV_{eff}}{d\theta} = \sin \theta \left[(mgl + p_\psi\Omega) - \frac{5m\ell^2\Omega^2}{4} \cos \theta \right] = 0, \quad (17)$$

de donde ya podemos ver que $\sin \theta = 0$ siempre corresponde a un equilibrio. La única solución a esta ecuación con sentido físico es $\theta = 0$, puesto que el pingüino no puede ubicarse con su cabeza mirando hacia arriba (lo que correspondería a $\theta = \pi$), pues se chocaría con el eje antes. Luego, puede haber dos más, si el corchete se anula. Para que esto suceda debemos tener:

$$\cos \theta = \frac{4(mgl + p_\psi\Omega)}{5m\Omega^2\ell^2}, \quad (18)$$

lo cual tiene sentido si y solo si:

$$\frac{4(mg\ell + p_\psi\Omega)}{5m\Omega^2\ell^2} \leq 1. \quad (19)$$

Un comentario: en caso de existir, estos equilibrios son efectivamente dos pero, por la simetría del problema, representan situaciones físicas prácticamente idénticas. Por la paridad de la función coseno, las dos soluciones de la ecuación (18) corresponden a ángulos de igual módulo y signo distinto, o sea que corresponden al pingüino formando el mismo ángulo con la vertical pero trasladando lo que sería el ángulo ϕ de Euler en π .

También nos pedían ver qué tiene que pasar para que el equilibrio en $\theta = 0$ sea estable. Para que esto pase, el extremo del potencial efectivo en $\theta = 0$ debe ser un mínimo, así que evaluamos la derivada segunda allí y pedimos que sea positiva:

$$\left. \frac{d^2 V_{eff}}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = -\frac{5m\ell^2\Omega^2}{4} + p_\psi + mg\ell > 0 \Leftrightarrow \frac{4(mg\ell + p_\psi\Omega)}{5m\Omega^2\ell^2} > 1, \quad (20)$$

donde el último paso lo hacemos simplemente para evidenciar que la condición de estabilidad del equilibrio en $\theta = 0$ es exactamente la condición complementaria a la de existencia de los otros dos. En otras palabras: si el equilibrio en $\theta = 0$ es estable, es el único y, si es inestable, aparecen otros dos en ángulos no nulos (que, como se imaginan, serán estables). Esto es bonito y esperable. El enunciado pedía la relación entre los parámetros y las condiciones iniciales, así que para ser precisos, deberíamos expresar las constantes de movimiento en términos de las condiciones iniciales. Esto es sencillo, puesto que $p_\psi = \frac{m\ell^2}{5} \left(\Omega \cos \theta_0 + \dot{\psi}_0 \right)$, donde θ_0 es el valor inicial del ángulo θ y $\dot{\psi}_0$ es el valor inicial de la derivada del ángulo ψ . Les queda a ustedes escribir la condición de estabilidad de $\theta = 0$ en términos de estas cosas.

2.3. Inciso (c)

En este caso nos dan las condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/4$ y algún $\dot{\psi}_0$ tal que $\omega_3 = 0$ (se puede calcular el valor de $\dot{\psi}_0$, pero no es relevante). Como p_ψ es proporcional a ω_3 , tenemos que dicha constante es también nula, así que la condición de equilibrio (17), evaluada en $\theta = \pi/4$, queda:

$$mg\ell - \frac{5m\ell^2\Omega^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{4\sqrt{2}g}{5\ell}}. \quad (21)$$

El tiempo que demora en completar una vuelta al eje vertical:

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{5\ell}{4\sqrt{2}g}}, \quad (22)$$

usando el dato de que todo sucede en la Tierra ($g \simeq 10\text{m/s}^2$) y que el bicho mide un metro (o sea que $\ell = 0,5\text{m}$) podemos evaluar la expresión anterior y obtener:

$$\tau \simeq 1,32\text{s}. \quad (23)$$

3. Problema 3: cosas de mandinga

3.1. Inciso (a)

Si tomamos la coordenada q con origen en el plano, el potencial es $V(q) = mg|q|$ y el lagrangiano resulta $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - mg|q|$, de donde es directo obtener la función de energía como $h = p\dot{q} - \mathcal{L}$, con $p = m\dot{q}$. Escribiendo esto último en función de q y de p , obtenemos:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + mg|q|, \quad (24)$$

que es constante (pues no depende explícitamente del tiempo) y además, coincide con la energía mecánica $E = T + V$. El valor de la constante se puede expresar fácilmente en términos de las condiciones iniciales: $H = E = mgh_0$, donde h_0 es la altura máxima que alcanza la partícula sobre el plano. Para armar el diagrama de fases, despejamos p en función de q :

$$p(q) = \pm\sqrt{2gm}\sqrt{h_0 - |q|}. \quad (25)$$

Para dibujar las curvas en el diagrama de fases, conviene mirar cada cuadrante por separado. Por ejemplo, en el primer cuadrante, tenemos p y q positivos, por lo que la función a graficar es $p(q) = \sqrt{2gm}\sqrt{h_0 - q}$. En los otros tres cuadrantes obtenemos gráficos que son simplemente rotaciones de este dibujo. En la Figura 4 se pueden ver algunos diagramas de fases para distintos valores de la altura inicial. Noten que no hay separatriz, ya que la naturaleza del movimiento es la misma para cualquier valor de la energía. Notar también que los únicos lugares donde las curvas no son suaves es en las intersecciones con los ejes verticales (al atravesar el plano, el momento lineal es continuo pero su derivada no, pues la aceleración cambia repentinamente de signo). Ya que estamos, pintamos el área encerrada por la curva asociada a la trayectoria que nos interesa, que no es otra cosa que la variable de acción que calcularemos en el inciso (c).

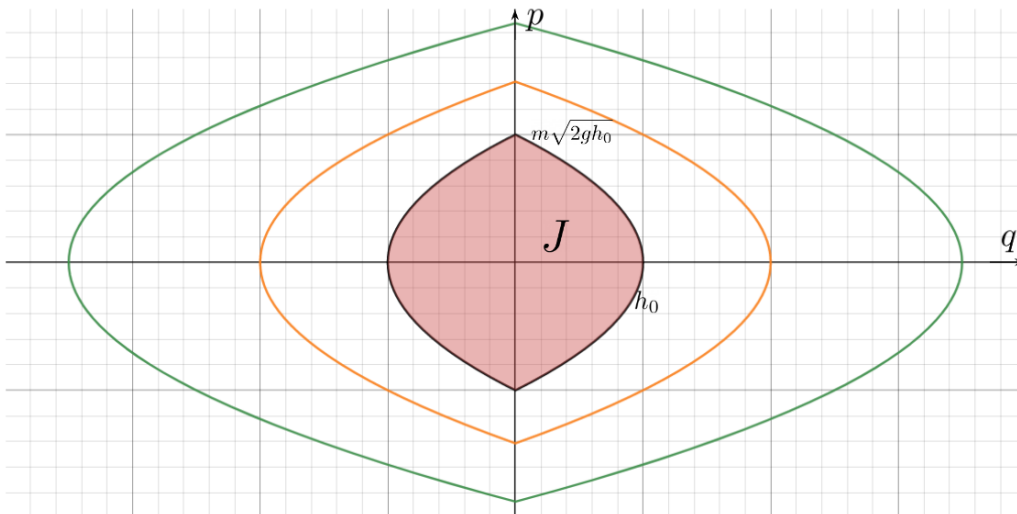


Figura 4: Diagrama de fases. Son parábolas acostadas.

3.2. Inciso (b)

Las ecuaciones de Hamilton se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= +\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -mg \operatorname{sg}(q), \end{aligned} \quad (26)$$

donde hemos aprovechado la función signo para no tener que andar escribiendo el módulo como una función partida. Estas ecuaciones nos dicen lo que esperamos: la dinámica de la moneda es la de una partícula sometida a un campo gravitatorio uniforme, pero la dirección de ese campo depende de si estamos *por encima* o *por debajo* del plano. Si integramos en el primer tramo (es decir, desde que la soltamos hasta que llega al orificio por primera vez), tenemos:

$$q_1(t) = h_0 - \frac{g}{2}t^2, \quad (27)$$

donde el subíndice 1 lo colocamos para explicitar que esta es la posición de la moneda en función del tiempo **únicamente** a lo largo del primer tramo. Esta ecuación tiene sentido hasta que la moneda llega al orificio, lo cual sucede en $t = \sqrt{2h_0/g}$. A partir de ese instante, la moneda pasará un rato en el inframundo: alguien que está allí, ve una moneda que emerge del orificio con las condiciones iniciales $q(\sqrt{2h_0/g}) = 0$ y $\dot{q}(\sqrt{2h_0/g}) = \sqrt{2h_0g}$. Esto no es otra cosa que un tiro vertical en el lado oscuro de la Tierra plana, con lo cual:

$$q_2(t) = -\sqrt{2h_0g} \left(t - \sqrt{2h_0/g} \right) + \frac{g}{2} \left(t - \sqrt{2h_0/g} \right)^2, \quad (28)$$

es la posición de la moneda en función del tiempo durante el segundo tramo, que dura desde $t = \sqrt{2h_0/g}$ hasta que retorna al orificio, en $t = 3\sqrt{2h_0/g}$. El último tramo es un tiro vertical en el lado amigable de la Tierra, con la misma velocidad que partió el anterior, pero de signo chanfleado. Tenemos entonces:

$$q_3(t) = +\sqrt{2h_0g} \left(t - 3\sqrt{2h_0/g} \right) - \frac{g}{2} \left(t - 3\sqrt{2h_0/g} \right)^2, \quad (29)$$

que tiene sentido desde $t = 4\sqrt{2h_0/g}$, tenemos que $q_3 = h_0$ y, por lo tanto, la moneda retornó a su posición inicial. Notar que el período del movimiento es $\tau = 4\sqrt{2h_0/g}$, que no es otra cosa que cuatro veces lo que demoró en caer al orificio la primera vez, lo cual podríamos haber anticipado por la vieja y conocida simetría de los tiros verticales sin fricción. Unx puede graficar fácilmente esta función por tramos y ver que es suave (lo que no es suave es su derivada, puesto que la derivada segunda, la aceleración, es discontinua en el orificio). Les queda a ustedes.

3.3. Inciso (c)

De la forma funcional de las curvas $p(q)$ es directo ver que:

$$J = \oint p(q) dq = 4 \int_0^{h_0} p_1(q) dq, \quad (30)$$

donde $p_1(q)$ es la curva $p(q)$ en el primer cuadrante. Tenemos entonces:

$$J = 4\sqrt{2gm} \int_0^{h_0} \sqrt{h_0 - q} dq = \frac{8\sqrt{2gm}h_0^{3/2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}E^{3/2}}{3g}, \quad (31)$$

donde, en la última igualdad, usamos que $E = mgh_0$ para expresar la variable de acción en términos de la energía. Para sacar el período, hacemos:

$$\tau = \frac{\partial J}{\partial E} = \frac{4\sqrt{2E}}{g\sqrt{m}} = 4\sqrt{2h_0/g}, \quad (32)$$

donde, en el último paso, volvimos a reemplazar $E = mgh_0$ para verificar que obtuvimos lo mismo que al resolver las ecuaciones de movimiento.

3.4. Inciso (d)

Dado que el movimiento de nuestra moneda arranca con $q = h_0$ y $p = 0$, queda cómodo integrar en el segundo cuadrante, que es donde se desarrolla la primera parte del movimiento.

Allí, tenemos $p(q) = -\sqrt{2gm}\sqrt{h_0 - q}$. La función característica en este primer tramo es:

$$W = -\sqrt{2gm} \int_{h_0}^q \sqrt{h_0 - q'} dq' = \frac{2\sqrt{2gm}}{3} (h_0 - q)^{3/2}, \quad (33)$$

que aún no es la función generatriz buscada porque está expresada en términos de las condiciones iniciales (h_0). Para hallar $W(q, J)$, tenemos que reemplazar $h_0 = \frac{1}{mg} \left(\frac{3gJ}{8\sqrt{2}} \right)^{2/3}$ (a esto se llega escribiendo h_0 en términos de E y luego usando la relación entre E y J). Ahora sí:

$$W(q, J) = \sqrt{2\sqrt{2gm}3} \left[\frac{1}{mg} \left(\frac{3gJ}{8\sqrt{2}} \right)^{2/3} - q \right]^{3/2}. \quad (34)$$

Ahora queremos las variables viejas en términos de las nuevas. Una es particularmente fácil:

$$J(q, p) = \frac{8\sqrt{2}}{3g} \left(\frac{p^2}{2m} + mgq \right)^{3/2}, \quad (35)$$

donde simplemente agarramos la expresión para J que ya teníamos y reemplazamos la dependencia explícita de E en las variables viejas $\{q, p\}$ (recordar que estamos en el primer tramo del movimiento, por eso no hace falta ponerle módulo a q en el potencial).

Para obtener $\theta(q, p)$, notamos que $\theta = \frac{\partial W}{\partial J}$. Derivando y reemplazando $J(q, p)$ donde aparezca, luego de algunas cuentas se llega a:

$$\theta(q, p) = \frac{\sqrt{2}|p|}{4\sqrt{m}\sqrt{\frac{p^2}{2m} + mgq}}. \quad (36)$$