Segundo parcial de Mecánica Clásica (B). Primer cuatrimestre de 2022.

Entregá cada ejercicio en hojas separadas y justificá todas tus respuestas. Para aprobar es necesario tener el 60 % del examen resuelto correctamente y al menos la mitad de cada problema bien planteado.

Problema 1. Cansadxs de cumplir años el mismo día, dos gemelxs construyen una nave y, en medio de su veinteavo cumpleañito, la hermana abandona la fiesta y emprende un paseo rectilíneo que comienza y concluye en su hogar, dado por la ecuación horaria:

$$x(t) = \frac{L}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right], \text{ para } t \in [0, T],$$

donde L es el máximo alejamiento de la nave y T es la duración del periplo según el hermano, que se quedó en casa.

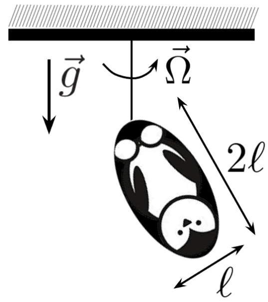
(a) Hallá la velocidad de la nave con respecto a la Tierra en función de t y mostrá que $L < cT/\pi$ (c es la velocidad de la luz). Obtené $\mathcal{T}$, la duración del periplo para la gemela viajera (expresalo en términos de una integral).

(b) Mostrá que en el caso no relativista se tiene $\mathcal{T} \simeq T$; mientras que en el caso ultra-relativista (es decir, cuando $L \to cT/\pi$), se tiene $\mathcal{T} \simeq (2/\pi)T$. ¿Por qué $\mathcal{T}$ no puede ser arbitrariamente pequeño?

(c) ¿A qué instante terrestre corresponde la imagen de nuestro planeta que la gemela ve justo antes de emprender el regreso a casa? Particularizá el resultado al caso no relativista y, luego, al caso ultra-relativista.

(d) Si $T = 10$ años y la nave alcanza velocidades arbitrariamente cercanas a la de la luz; esquematizá lo anterior en un diagrama de Minkowski. Describí, cualitativamente, cómo ve la gemela (que dispone de un telescopio bien poderoso) la realidad terrestre a lo largo del viaje. ¿Qué edades tienen al reunirse? ¿Siguen cumpliendo años el mismo día? ¿O deberán visitar a su idiota de confianza para que les revise las cartas astrales?

Problema 2. Cuando sus alas están pegadas a su cuerpo, un pingüino emperador bien alimentado puede modelarse decentemente por un elipsoide de revolución homogéneo, con dos semiejes menores de largo $\ell/2$ y un semieje mayor de largo ℓ. De uno de los extremos de un eje vertical que gira con frecuencia angular constante de módulo Ω (en principio, desconocida) cuelga de sus piececillos un pingüino emperador de masa m y altura 2ℓ como se ve en la figura. El amarre está bien aceitado, de manera que el ovalado plumífero puede girar libremente sobre su eje de simetría. El divertimento se ubica en un planeta donde el módulo de la aceleración de la gravedad vale g. *Ayuda: el tensor de inercia de un elipsoide homogéneo lo podés encontrar en el pizarrón; y su centro de masa lo podés encontrar solx.*



(a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el problema? Elegí un sistema de coordenadas generalizadas y escribí el lagrangiano. Hallá dos cantidades conservadas y mostrá que la componente de la velocidad angular paralela al eje de simetría del ovíparo se mantiene constante durante el movimiento.

(b) Reducí el problema a uno unidimensional equivalente. Mostrá que la configuración en la que la cabeza del ave apunta hacia abajo es de equilibrio y que, a lo sumo, puede haber dos más. Indicá qué relación debe existir entre los parámetros y las condiciones iniciales del problema para que el equilibrio mencionado sea estable.

(c) Se coloca al animal de manera que su eje de simetría forma un ángulo de 45^o con la vertical y se le imprime una rotación en torno a dicho eje de manera que la componente neta de la velocidad angular en el mismo es nula. Para estas condiciones iniciales, se observa que el pingüino mantiene fijo ese ángulo de 45^o. Usando esto, obtené Ω en función de datos. Sabiendo que el experimento se desarrolla en la Tierra y que la altura media de un pingüino emperador es algo así como un metro, estimá cuánto demora el ave en completar una vuelta al eje.

Problema 3. En un universo paralelo donde la Tierra es plana; una estudiante de física (disciplina marginal en ese universo) taladra un pequeño orificio en la Tierra y deja caer una moneda de masa m desde una altura h_0 sobre el mismo. Tené en cuenta que el potencial gravitatorio de un plano homogéneo, bien cerca del plano y muy lejos de los bordes, crece linealmente con la distancia al plano. *Nota de interés cultural: este modelo describe de manera digna los portales entre la Hawkins al derecho y la Hawkins dada vuelta en el popular show televisivo "Cosas de Mandinga".*

(a) Tomando como variables canónicas $\{q, p\}$ a la posición y el momento de la moneda en la dirección perpendicular a nuestro delgado planeta; escribí el potencial $V(q)$ y el hamiltoniano del sistema. ¿Es constante? ¿Coincide con la energía mecánica? Bocetá el diagrama de fases, y que se note en qué puntos las curvas no son suaves.

(b) Escribí las ecuaciones de Hamilton y obtené $q(t)$ para las condiciones iniciales dadas. Indicá el período del movimiento en función de datos. *Nota: nos alcanza con que escribas $q(t)$ para una única oscilación completa.*

(c) Calculá la variable de acción $J \equiv \oint p\, dq$ y usala para obtener nuevamente el período del movimiento.

(d) Hallá $W(q, J)$, la generatriz de la transformación canónica que da lugar a las variables de ángulo-acción $\{\theta, J\}$ y obtené $\theta(q, p)$ y $J(q, p)$. *Nota: nos alcanza con que trabajes en sólo un cuadrante del espacio de fases $\{q, p\}$.*