Potencial para el campo electro-magnético

Fuerza de Lorentz: $\bar{F}_L = q\bar{E} + \frac{q}{c}(\bar{v}\times\bar{B})$

con $\bar{E} = -\bar{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$, $\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$

Si ahora en vez de $V = V(q_j)$ tenemos un potencial $U = U(q_j, \dot{q}_j)$, podemos escribir

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

y así son válidas las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad \text{con} \quad \mathcal{L} = T - \underset{\sim}{U}$$

Para el campo E-M es

$$\boxed{U = q\phi - \frac{q}{c}\bar{A}\cdot\bar{v}}$$

{ Se llama "potencial generalizado", o "potencial dependiente de la velocidad"

Guía 1

19) (a) $\bar{A} = B_0 x\hat{y}$

$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A} = \left(\cancelto{0}{\frac{\partial A_z}{\partial y}} - \cancelto{0}{\frac{\partial A_y}{\partial z}}\right)\hat{x} + \left(\cancelto{0}{\frac{\partial A_z}{\partial x}} - \cancelto{0}{\frac{\partial A_x}{\partial z}}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \cancelto{0}{\frac{\partial A_x}{\partial y}}\right)\hat{z} =$$

$$= B_0\hat{z} \checkmark$$

$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ $\qquad \bar{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$

$$U = \underset{\sim}{q\phi} - \frac{q}{c}\bar{A}\cdot\bar{v} = -\frac{q}{c}B_0 x\dot{y}$$

Tomo $\phi = 0$ pues $\bar{E} = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q}{c}B_0 x\dot{y}$$

Ecuaciones de Euler-L:

x) $\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{q}{c}B_0\dot{y} \Rightarrow \ddot{x} = \underbrace{\frac{qB_0}{mc}}_{\omega}\dot{y}$

Defino: $\omega = \frac{qB_0}{mc}$

y) $\frac{d}{dt}\underbrace{\left(m\dot{y}+\frac{q}{c}x B_0\right)}_{P_y=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}}=0 \Rightarrow \ddot{y}=-\omega\dot{x}$

$P_y=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}$ → Se conserva impulso lineal de la partícula + impulso debido al campo

$$\left(\bar{P}=\bar{p}+\frac{q}{c}\bar{A}\right)$$

z) $\frac{d}{dt}(m\dot{z})=0 \rightarrow \ddot{z}=0 \Rightarrow \boxed{z(t)=\dot{z}_0 t+z_0}$ MRU en $\hat{z}$

Movimiento en el plano xy: $\ddot{x}=\omega\dot{y}$ (1)

$\ddot{y}=-\omega\dot{x}$ (2)

Defino $\eta=\dot{x} \Rightarrow \dot{\eta}=\ddot{x}$

En ec. (1): $\dot{\eta}=\omega\dot{y}$

En ec. (2): $\ddot{y}=-\omega\eta$

$\left.\right\} \ddot{\eta}=\omega\ddot{y}=-\omega^2\eta$

$\Downarrow$

$\ddot{\eta}=-\omega^2\eta$

Es el osc. armónico: $\eta=A\cos(\omega t+\varphi)$

Es decir: $\dot{x}=\eta=A\cos(\omega t+\varphi)$ (3)

De ec. (1): $\ddot{x}=\dot{\eta}=A\cancel{\omega}(-\sin(\omega t+\varphi))=\cancel{\omega}\dot{y}$

$\Rightarrow \dot{y}=-A\sin(\omega t+\varphi)$ (4)

Integrando ecs. (3) y (4):

$x(t)=\frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)+B$

$y(t)=\frac{A}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)+C$

A, φ, B y C se determinan a partir de las conds. iniciales

C.I.: $\dot{x}(0)=\dot{x}_0=A\cos(\varphi)$ (5)

$\dot{y}(0)=\dot{y}_0=-A\sin(\varphi)$ (6)

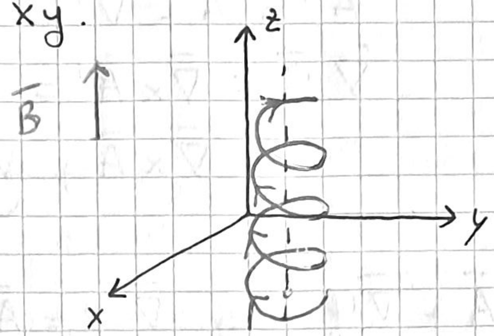
$x(0)=\frac{A}{\omega}\sin(\varphi)+B=x_0 \overset{(6)}{=} -\frac{\dot{y}_0}{\omega}+B \Rightarrow B=x_0+\frac{\dot{y}_0}{\omega}$

$y(0)=\frac{A}{\omega}\cos(\varphi)+C=y_0 \underset{(5)}{=} \frac{\dot{x}_0}{\omega}+C \Rightarrow C=y_0-\frac{\dot{x}_0}{\omega}$

NOTA

Escribiendo : $\left(x(t)-B\right)^2+\left(y(t)-C\right)^2=\frac{A^2}{\omega^2}$

y vemos así que el movimiento es circular en el plano xy.



(d) Si $\bar{v}(0)=0 \Rightarrow \dot{x}_0=\dot{y}_0=\dot{z}_0=0$

•) $z(t)=z_0 \equiv cte$

•) $\dot{x}(0)=A\cos\varphi=0$

•) $\dot{y}(0)=-A\sin\varphi=0$

$\Big\} \Leftrightarrow A=0$

$\Rightarrow x(t)=B=x_0 \equiv cte$

$y(t)=C=y_0 \equiv cte$

Es decir que la partícula no se mueve

$$\bar{F}_L=\underbrace{q\bar{E}}_{0}+\frac{q}{c}\bar{v}\times\bar{B}=0$$

(b) $\bar{A}'=\frac{1}{2}\bar{B}\times\bar{r}=\frac{1}{2}B_0\,\hat{z}\times(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})=\frac{B_0}{2}(x\hat{y}-y\hat{x})$

Verifico: $\bar{B}=\bar{\nabla}\times\bar{A}'=\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}=\left(\frac{B_0}{2}+\frac{B_0}{2}\right)=B_0\hat{z}$ ✓

$$\mathcal{L}=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{q}{c}\bar{v}\cdot\bar{A}'=$$

$$=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{q}{c}\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)\frac{B_0}{2}$$

Ecs. de E-L :

x) $\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}-\frac{q}{c}\frac{B_0}{2}y\right)=\frac{q}{c}\dot{y}\frac{B_0}{2} \Rightarrow m\ddot{x}-\frac{qB_0}{2c}\dot{y}=\frac{B_0}{2}\frac{q}{c}\dot{y}$

$\Rightarrow \ddot{x}=\underbrace{\frac{qB_0}{mc}}_{\omega}\dot{y} \Rightarrow \boxed{\ddot{x}=\omega\dot{y}}$

Misma ec. que antes.

y) $\frac{d}{dt}\left(m\dot{y}+\frac{qB_0}{2c}x\right)=-\frac{qB_0}{2c}\dot{x} \Rightarrow \ddot{y}=-\underbrace{\frac{qB_0}{mc}}_{\omega}\dot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{y}=-\omega\dot{x}}$

Misma ec. que antes.

z) $\boxed{\ddot{z}=0}$

No cambia la dinámica puesto que

$$\bar{A}'=\bar{A}+\bar{\nabla}\psi$$

$$\bar{B}=\bar{\nabla}\times\bar{A}'=\bar{\nabla}\times(\bar{A}+\bar{\nabla}\psi)=$$

$$=\bar{\nabla}\times\bar{A}+\underbrace{\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\psi)}_{0}=\bar{\nabla}\times\bar{A}$$

(c) $\bar{A}'=\bar{A}+\bar{\nabla}\psi \Rightarrow \bar{\nabla}\psi=\bar{A}'-\bar{A}=$

$$=\frac{B_0}{2}(x\hat{y}-y\hat{x})-B_0x\hat{y}=$$

$$=-\frac{B_0}{2}(x\hat{y}+y\hat{x})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{z}=-\frac{B_0}{2}y\hat{x}-\frac{B_0}{2}x\hat{y} \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\psi}{\partial z}=0 \Rightarrow \psi=\psi(x,y)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{B_0}{2}y \Rightarrow \psi=\int\left(-\frac{B_0}{2}\right)y\,dx+f(y)=$$

$$=-\frac{B_0}{2}xy+f(y) \quad (7)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\overset{(7)}{=}-\frac{B_0}{2}x+f'(y)\overset{(8)}{=}-\frac{B_0}{2}x \Leftrightarrow f'(y)=0$$

$$\Rightarrow f:=cte$$

En conclusión: $\boxed{\psi(x,y)=-\frac{B_0}{2}xy+K}$ con $K\equiv cte$

Se puede ver que $\mathcal{L}'=T-U'$ con $U'=-\frac{q}{c}\bar{v}\cdot\bar{A}'$ se puede escribir como $\mathcal{L}'=\mathcal{L}+\frac{dF}{dt}$ con F una función escalar y $\mathcal{L}=T-U$, siendo

$$U=-\frac{q}{c}\bar{v}\cdot\bar{A}$$

$$\mathcal{L}'=\mathcal{L}+\frac{dF}{dt}$$

$$\cancel{T}-U'=\cancel{T}-U+\frac{dF}{dt} \Rightarrow \frac{dF}{dt}=U-U'=-\frac{q}{c}\bar{v}\cdot\bar{A}+\frac{q}{c}\bar{v}\cdot\bar{A}'=$$

$$=\frac{q}{c}(\bar{v}\cdot\bar{A}'-\bar{v}\cdot\bar{A})$$

NOTA

$$\frac{dF}{dt} = \frac{q}{c}\left(\frac{B_0}{2} x\dot{y} - \frac{B_0}{2} y\dot{x} - B_0 x\dot{y}\right) = -\frac{q}{c}\frac{B_0}{2}\left(x\dot{y}+y\dot{x}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\underbrace{-\frac{q}{c}\frac{B_0}{2}xy}_{\psi}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{q}{c}\psi\right) \Longrightarrow F = \frac{q}{c}\psi$$

En general, tanto $\mathcal{L}$ como $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$ dan como resultado las mismas ecuaciones de movimiento ya que se puede demostrar que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

y en consecuencia:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\mathcal{L}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j}$$

NOTA