

Transformaciones de simetría infinitesimales

$$\tilde{q}_i = q_i + \delta q_i \Rightarrow \dot{\tilde{q}}_i = \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i \quad i=1, \dots, n$$

$$\tilde{t} = t + \delta t$$

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad \tilde{L} = L(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, \tilde{t})$$

$$\delta L = \tilde{L} - L = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \bigg|_{q_i, \dot{q}_i, t} (\tilde{q}_i - q_i) +$$

Taylor alrededor de $(q_i, \dot{q}_i, t)$ de $\tilde{L}$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bigg|_{q_i, \dot{q}_i, t} (\dot{\tilde{q}}_i - \dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} \bigg|_{q_i, \dot{q}_i, t} (\tilde{t} - t) + \dots - L$$

Si la transformación es de simetría:

$$\delta L = \tilde{L} - L = \epsilon \frac{dG}{dt}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i}_{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i}_{-\frac{dh}{dt}} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t = \epsilon \frac{dG}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \delta q_i - h \delta t \right) = \epsilon \frac{dG}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - h \delta t - \epsilon G \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - h \delta t - \epsilon G \right] \equiv Cte$$

En particular sabemos que:

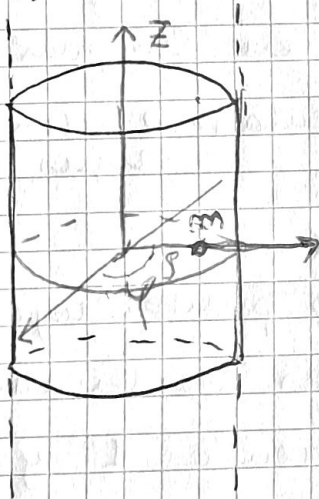
$$\bullet) \text{ Si } \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

$$\Rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{cte}$$

$$\bullet) \text{ Si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 = -\frac{dh}{dt} \Rightarrow \left\{ h = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i - L \equiv \text{cte} \right\}$$

Gula 2: Simetrías

11. (c) Campo producido por un cilindro circular infinito:



$$\rho_2 > \rho_1 > \rho_3$$

Por la simetría de la configuración, el potencial no puede depender de z ni de φ (la partícula "ve" lo mismo si la movemos en z y en φ manteniendo ρ constante)

$$\Rightarrow V = V(\rho)$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho)$$

$$\bullet) \text{ Como } L \neq L(z, \varphi) \Rightarrow (1) \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} \equiv \text{cte}$$

Es decir, se conserva p_z

$$\Rightarrow (2) \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0$$

(3)

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \dot{\rho}^2 \dot{\varphi} \equiv \text{cte}$$

Como el ángulo φ está asociado a las rotaciones alrededor de $\hat{z}$, lo que se conserva es

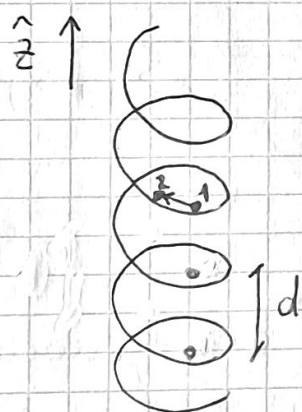
$$L_z = \vec{L} \cdot \hat{z} = m \dot{\rho}^2 \dot{\varphi} \equiv \text{cte}$$

(momento angular en la dirección $\hat{z}$)

Podemos verificarlo calculando L_z :

$$L_z = \vec{L} \cdot \hat{z} = (\vec{r} \times \vec{p})_z = [(\rho \hat{\rho} + z \hat{z}) \times m(\dot{\rho} \hat{\rho} + \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \dot{z} \hat{z})]_z = m \dot{\rho}^2 \dot{\varphi} = \text{cte} \checkmark$$

(d) Campo producido por una hélice circular infinita.



El campo es idéntico en los puntos azules (las 2 partículas azules rojas "ven" lo mismo).

Concentrémonos en los puntos rojos.

Si (ρ_1, φ_1, z_1) son las coordenadas cilíndricas de la partícula 1 y

(ρ_2, φ_2, z_2) las de la partícula 2, la simetría se mantiene cuando: $\varphi_2 = \varphi_1 + \epsilon$,

$$z_2 = z_1 + \frac{d\epsilon}{2\pi} \quad \text{y} \quad \rho_2 = \rho_1$$

puesto que la hélice está parametrizada por:

$$\vec{r}(\varphi) = \left(\underbrace{R \cos(\varphi)}_x, \underbrace{R \sin(\varphi)}_y, \underbrace{\frac{d}{2\pi} \varphi}_z \right)$$

$$V(\rho_1, \varphi_1, z_1) = V\left(\rho_1, \varphi_1 + \epsilon, z_1 + \frac{d}{2\pi} \epsilon\right)$$

Entonces consideremos la transformación infinitesimal

$$\tilde{r} = r, \quad \tilde{\varphi} = \varphi + \epsilon, \quad \tilde{z} = z + d \frac{\epsilon}{2\pi}, \quad \tilde{t} = t$$

$$\dot{\tilde{r}} = \dot{r}, \quad \dot{\tilde{\varphi}} = \dot{\varphi}, \quad \dot{\tilde{z}} = \dot{z} \quad \text{pues } \epsilon \equiv \text{cte}$$

La transformación es de simetría puesto que

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(r, \varphi, z) =$$

$$= \tilde{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(r, \varphi + \epsilon, z + \frac{d\epsilon}{2\pi})$$

$$(\text{Como } \tilde{L} - L = \frac{dG}{dt} = 0 \text{ podemos tomar } G \equiv 0)$$

y entonces la cantidad conservada es

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \delta r + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \delta z - h \delta t = 0$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_0 \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\epsilon} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\frac{d\epsilon}{2\pi}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_0$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \frac{d\epsilon}{2\pi} \equiv \text{cte}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = p_{\varphi} = L_z = m r^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = p_z = m \dot{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{L_z + \frac{d}{2\pi} p_z \equiv \text{cte}}$$

$$14. (a) \varphi = \varphi(x, y), \quad \bar{A} = A(x, y) \hat{z} \quad U = q\varphi - \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \bar{A}$$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q\varphi(x, y) + \frac{q}{c} \dot{z} A(x, y)$$

$$\bullet) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$\frac{\partial L}{\partial z} = 0$ (equivale a decir que L es invariante ante la transformación $\tilde{z} = z + \epsilon$, es decir, ante traslaciones en z)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = p_z = m\dot{z} + \frac{q}{c} A(x, y) \equiv \text{cte}}$$

$\bullet \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{h \equiv \text{cte}}$ (L es invariante ante traslaciones temporales $\tilde{t} = t + \epsilon$)

$$\begin{aligned} \boxed{h} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} - L = \\ &= m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + \dot{z} \left(m\dot{z} + \frac{q}{c} A(x, y) \right) - \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \\ &\quad + q\varphi(x, y) - \frac{q}{c} \dot{z} A(x, y) = \end{aligned}$$

$$\boxed{= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q\varphi(x, y) \equiv \text{cte}} \quad h \neq T + U$$