Entrega optativa Guía 2: Principios variacionales y Simetrías

Una partícula cargada de masa m y carga q se mueve en el plano $x-y$ con velocidad paralela al eje $\hat{x}$, e ingresa a una región $x \geq x_0$ sujeta a un campo magnético $\mathbf{B} = B_0\hat{z}$. Se realiza una medición y se establece que la partícula va del punto (x_0, y_0) a $(x_0, y_0 - 2R)$ en un tiempo $\Delta t = \frac{\pi}{\omega}$, siendo $\omega = \frac{qB_0}{m}$.

Variacionales

(a) Proponga la siguiente familia de trayectorias:

$$x(t) = a\sin(\omega t) + c$$
$$y(t) = b\cos(\omega t) + d$$

Empleando el *gauge de Landau*: $\mathbf{A} = B_0 x\hat{y}$ use el principio variacional de Hamilton para determinar los parámetros propuestos. No se olvide de imponer las condiciones iniciales y finales.

(b) ¿A qué curva corresponde la solución propuesta?. Verifique que su solución es exacta resolviendo las ecuaciones de Lagrange (Problema 19a de la Guía 1) con condiciones iniciales apropiadas.

Simetrías 1

(c) Escriba el Lagrangiano del problema usando el *gauge simétrico*: $\mathbf{A} = \frac{B_0}{2}(-y\hat{x} + x\hat{y})$.

(d) Verifique que la transformación de coordenadas (rotación en θ alrededor del eje z)

$$x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta)$$
$$y' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta)$$

es una transformación de simetría del Lagrangiano.

(e) Considere la transformación infinitesimal $\theta = \epsilon$ (a primer orden en ϵ). Use el teorema de Nöther para determinar la magnitud conservada. Interprete separando la parte mecánica de la parte magnética.

Simetrías 2

(f) Escriba el Lagrangiano del problema usando el *gauge de Landau*: $\mathbf{A} = -B_0 y\hat{x}$.

(g) Verifique que la transformación de coordenadas infinitesimal:

$$x' = x - y\epsilon$$
$$y' = x\epsilon + y$$

es una transformación de simetría generalizada del Lagrangiano. Use el teorema de Nöther para determinar la magnitud conservada. Interprete separando la parte mecánica de la parte magnética. Compare con lo obtenido usando el otro *gauge*.