

Guía 3: Mecánica Clásica

P3

$$\vec{F}(r) = \left(-\frac{K}{r^2} + \frac{C}{r^3} \right) \hat{r}$$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{K}{r} + \frac{C}{2r^2} \quad (1)$$

Buscamos resolver la ecuación para las trayectorias.

Usaremos las dos conservaciones:

$$\begin{cases} l = mr^2\dot{\varphi} \\ E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \end{cases} \quad (2)$$

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} \quad (4)$$

$$\text{usamos } r = \frac{1}{u} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \quad (6) \quad \left(\begin{array}{l} \text{regla de} \\ \text{la cadena} \end{array} \right)$$

$$(6) \text{ en } (4): \quad \dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \left(\frac{l u^2}{m} \right)$$

$$(7) \text{ en } (3): \quad \Rightarrow \dot{r} = -\left(\frac{l}{m} \right) \frac{du}{d\varphi} \quad (7)$$

$$\frac{l^2}{2m} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{l^2}{2m} u^2 - K u = E$$

$$\frac{l^2}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{l^2}{2} \left(u - \frac{K m}{l^2} \right)^2 = E m + \frac{K^2 m^2}{2 l^2} \quad (8)$$

Vemos la ecuación tipo

energía de oscilador armónico

con: $m^* = l^2$; $k^* = l'^2$; $l = l + mc^2$

$$E^* = mE + \frac{k^2 m^2}{2l'^2} \quad t^* = \varphi$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \frac{l'}{l} = \alpha$$

$$U = \frac{km}{l'^2} + M_0 \cos(\alpha \varphi) \quad (9)$$

donde $\varphi_0 = 0$, ese mayor en eje x.

$$\frac{dU}{d\varphi} = -\alpha \sin(\alpha \varphi) \quad (10)$$

En la conservación:

$$\frac{l^2}{2} \alpha^2 \sin^2(\alpha \varphi) + \frac{l'^2}{2} M_0^2 \cos^2(\alpha \varphi) = E_m + \frac{k^2 m^2}{2l'^2} \quad (11)$$

$$\Rightarrow l'^2 M_0^2 = 2E_m + \frac{k^2 m^2}{l'^2} \quad (12)$$

$$M_0 = \frac{1}{l'^2} \sqrt{2E_m l'^2 + k^2 m^2} = \frac{km}{l'^2} \sqrt{1 + \frac{2E_m l'^2}{mk^2}}$$

$$\therefore r = \frac{\frac{l'^2}{km}}{1 + e \cos(\alpha \varphi)} = \frac{d}{1 + e \cos(\alpha \varphi)}$$

$$\text{Con: } d = \frac{l'^2}{km}; \quad e = \sqrt{1 + \frac{2l'^2 E_m}{mk^2}}$$

Guía 3: Mecánica Clásica

Cont P3:

(b) Con la ecuación de Binet también se obtiene la ecuación de un oscilador armónico.

(c) Si $C=0 \Rightarrow$ Kepler $\alpha=1$, $l'=l$
es una elipse.

Si C es chico $\alpha = \frac{l'}{l} = \sqrt{1 + \frac{mC}{l^2}}$

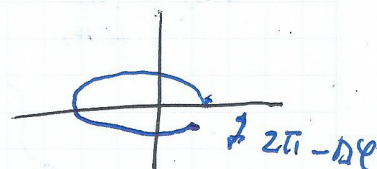
$$\alpha \approx 1 + \frac{mC}{2l^2}$$

Período orbital radial π

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\alpha} < 2\pi$$

4 perihelio $\Delta\varphi_p = \frac{2\pi}{\alpha} - 2\pi < 0$

$$\Delta\varphi_p \approx -\frac{mC\pi}{l^2}$$



Gui 3: Mecánica Clásica

Cont P3:

(b) Con la ecuación de Binet también se obtiene la ecuación de un oscilador armónico.

(c) Si $C=0 \Rightarrow$ Kepler $\alpha=1$, $l'=l$
es una elipse.

Si C es chico $\alpha = \frac{l'}{l} = \sqrt{1 + \frac{mC}{l^2}}$

$$\alpha \approx 1 + \frac{mC}{2l^2}$$

Periodo orbital radial π

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\alpha} < 2\pi$$

4 perihelio $\Delta\varphi_p = \frac{2\pi}{\alpha} - 2\pi < 0$

$$\Delta\varphi_p \approx -\frac{mC\pi}{l^2}$$

