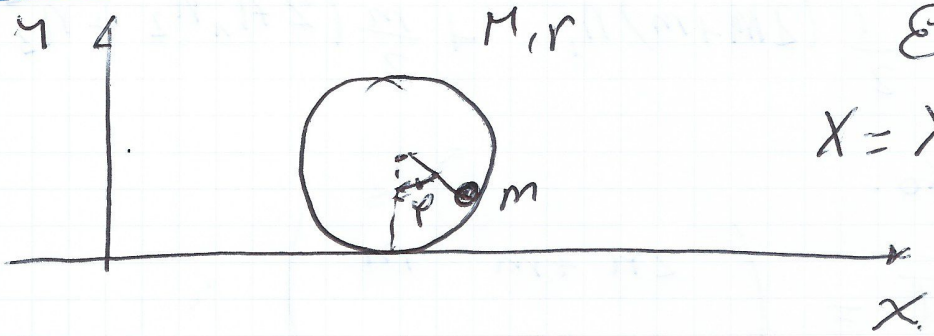
Guía 3: Mecánica

P5 Versión simplificada.



Equilibrio

$X = X_0 \ , \ \varphi_0 = 0$

vínculo de rodadura:

$$r\,d\theta = dX \qquad \left(\begin{array}{c}\text{desplazamiento}\\ \text{del CM}\\ \text{del aro}\end{array}\right)$$

φ: ángulo de m

Posición de m con respecto al origen:

$$\begin{cases} x = X + r\sin\varphi \\ y = r - r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dot{X} + r\cos\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{y} = r\sin\varphi\,\dot{\varphi} \end{cases}$$

$$v^2 = \dot{X}^2 + 2\dot{X}r\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

aro: $T_M = \dfrac{M\dot{X}^2}{2} + \dfrac{I\dot{\theta}^2}{2} \qquad , I = Mr^2$

$$\Rightarrow T_M = \frac{1}{2}(2M\dot{X}^2) \qquad , V_M = Mgr = cte$$

masita:

$$T_m = \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + 2\dot{X}r\underbrace{\cos\varphi}_{1}\dot{\varphi}$$

$$V_m = mg(r - r\cos\varphi) = -mgr\underbrace{\cos\varphi}_{1-\frac{\varphi^2}{2}} + cte$$

$$V \simeq mgr\frac{\varphi^2}{2} = m\frac{g}{r}\eta_2^2 \qquad \eta_2 = r\varphi$$

$$\therefore \quad V = \frac{mg}{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T \simeq \frac{1}{2}(2M+m)\dot{\eta}_1^2 + \frac{m}{2}(2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2 + \dot{\eta}_2^2)$$

Con:

$\eta_1 = x - x_0$.

$$\therefore \quad T = \begin{pmatrix} 2M+m & m \\ m & m \end{pmatrix}$$

Modos normales:

i) Desplazamiento (Traslación): $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$V\bar{a}_1 = 0 = \omega_1^2 T \bar{a}_1 \Rightarrow \omega_1 = 0$$

La masa m se mueve a la misma velocidad q' el CM del aro.

$$\dot{x} = \dot{X} \qquad \varphi = 0$$

Es modo de traslación.

ii) Contrafase: $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$

Por ortogonalidad según T:

$$\bar{a}_2^t T \bar{a}_1 = 0$$

$T\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2M+m \\ m \end{pmatrix}$, $\bar{a}_2^t T \bar{a}_1 = 2M + m - \alpha m = 0$

$\Rightarrow \alpha = 1 + \frac{2M}{m}$ usando $V\bar{a}_2 = \omega_2^2 T \bar{a}_2$ se calcula ω_2