Ejercicios 8 y 11 Guía 5

Autor: Vladimir D. Rodríguez Chariarse

1. Breve introducción teórica

Este problema es interesante para identificar los ángulos de Euler, luego de una elección de ejes principales (en este caso necesariamente fijos al cuerpo). El ángulo θ de Euler es el que hace el eje $\hat{3}$ con el eje espacial $\hat{z}$. El eje de nodos en la intersección del plano $\hat{1}-\hat{2}$ (perpendicular al eje $\hat{3}$) con el plano espacial $x-y$. El ángulo ϕ de Euler es el que hace el eje de nodos $\hat{n}$ con el plano $x-y$. Se rota un ángulo θ alrededor del eje de nodos. Finalmente se rota en ψ alrededor del eje $\hat{3}$.

Para expresar la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ componemos las tres velocidades angulares:

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{n} + \dot{\psi}\hat{3}$$

En muchos casos es posible encontrar fácilmente las proyecciones Ω_i, $i = 1.,3$, en forma alternativa se puede recurrir a la fórmula ya obtenida.

La velocidad del centro de masa se puede obtener, usando coordenadas cartesianas o polares y encontrando o usando las velocidades correspondientes. Alternativamente, si se conoce la velocidad de un punto P en el cuerpo rígido se puede usar el campo de velocidades:

$$\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{v}_P + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r}_{CM} - \mathbf{r}_P)$$

La energía potencial (típicamente gravitatoria) se calcula usando la coordenada z_{CM}.

Finalmente el Lagrangiano se escribe:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}v_{CM}^{2} + \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2) - mgz_{CM}$$

2. Solución del Problema 8

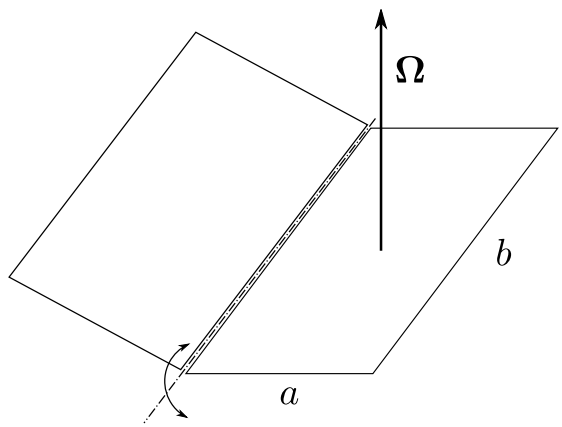

Figura 1: *Dos placas articuladas, una de ellas horizontal, rotando con velocidad angular Ω constante.*

La primera placa sólo aporta una energía cinética y potencial constantes, por lo cual la ignoramos en el Lagrangiano. Elegimos el eje $\hat{3}$ perpendicular al plano de la segunda placa, el eje $\hat{2}$ perpendicular al lado b y saliente, con lo que el eje $\hat{1} = \hat{2} \times \hat{3}$ queda definido.

En este caso es conveniente usar en lugar del ϕ de Euler el φ del CM en cilíndricas. Ambos se relacionan mediante: $\phi = \varphi + \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \dot{\phi} = \dot{\varphi}$ como no varían las velocidades usaremos ϕ en lugar de φ (sólo importante para la simulación). En la figura por ejemplo es claro que el ángulo de Euler $\phi = 0$, mientras que el $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Por vínculo $\dot{\phi} = \omega$ y $\dot{\psi} = 0$, siendo el eje de nodos la bisagra que une las placas.

$$\mathbf{\Omega} = \omega \hat{z} + \dot{\theta} \hat{n}$$

usando que $\hat{n} = \hat{1}$ y que $\hat{z} = \cos\theta \hat{3} + \sin\theta \hat{2}$:

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\theta} \hat{1} + \omega \sin\theta \hat{2} + \omega \cos\theta \hat{3}$$

2.1. Energía cinética de traslación del CM

Es posible identificar la velocidad del CM como suma de dos velocidades perpendiculares:

$$\mathbf{v}_{CM} = -\frac{a}{2}(1 + \cos\theta)\ \omega\ \hat{1} + \frac{a}{2}\ \dot{\theta}\ \hat{3}$$

Por consiguiente la energía de traslación del CM queda:

$$T_{CM} = \frac{m}{2}\frac{a^2}{4}\left((1 + 2\cos\theta + \cos^2(\theta)\omega^2 + \dot{\theta}^2\right)$$

2.2. Energía cinética de rotación alrededor del CM

Usaremos el caso de placas delgadas:

$$I_1 = \frac{m}{12}a^2 \qquad I_2 = \frac{m}{12}b^2 \qquad I_3 = I_1 + I_2 = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

con lo que usando la velocidad $\mathbf{\Omega}$ hallada:

$$T_{rot} = \frac{m}{2}\frac{1}{12}\left(a^2\dot{\theta}^2 + b^2\omega^2 + a^2\omega^2\cos^2(\theta)\right)$$

2.3. Sin gravedad

En este caso el Lagrangiano es la energía cinética:

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ma^2\omega^2\cos^2(\theta) + \frac{1}{4}ma^2\omega^2\cos\theta$$

Notemos que ma^2 se puede factorizar por lo que el movimiento es independiente de m y de a. La ecuación de movimiento para θ queda sin el factor común ma^2:

$$\frac{\ddot{\theta}}{3} = -\omega^2\left(\frac{\sin(2\theta)}{6} + \frac{\sin\theta}{4}\right)$$

2.3.1. Conservación del Hamiltoniano

Como el Lagrangiano no depende del tiempo se conserva el Hamiltoniano. Pero en este caso la energía cinética no es funciòn cuadrática homogenea, por lo que deberemos calcular explícitamente el Hamiltoniano:

$$H = \dot{\theta}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} - \mathcal{L} = \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{6}ma^2\omega^2\cos^2(\theta) - \frac{1}{4}ma^2\omega^2\cos\theta$$

que podemos expresarlo como:

$$\frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta) = H \qquad V_{eff}(\theta) = -\frac{1}{6}ma^2\omega^2\cos^2(\theta) - \frac{1}{4}ma^2\omega^2\cos\theta$$

Podemos ver que los valores de equilibrio hallados corresponden a valores extremos del potencial efectivo $V_{eff}(\theta)$. En el caso de equilibrio estable $V_{eff}(\theta)$ es mínimo, en el caso de equilibrio inestable $V_{eff}(\theta)$ es un máximo.

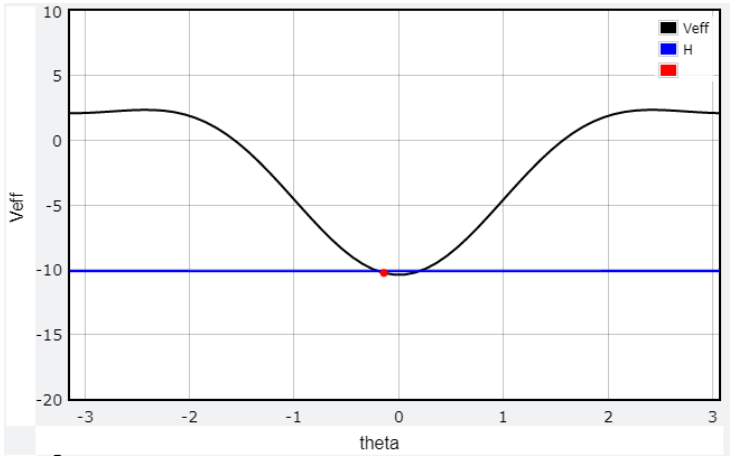

Figura 2: *Forma funcional del potencial efectivo sin gravedad. El equilibrio estable es en $\theta = 0$ y theta $= \pi$. En $\theta = 2{,}41$ hay un máximo.*

2.4. Con gravedad

En este caso el Lagrangiano es la energía cinética menos la potencial$V(\theta) = mg\frac{a}{2}\sin\theta$:

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ma^2\omega^2\cos^2(\theta) + \frac{1}{4}ma^2\omega^2\cos\theta - mg\frac{a}{2}\sin\theta$$

Notemos que m se puede factorizar por lo que el movimiento es independiente de m. La ecuación de movimiento para θ queda sin el factor común m:

$$\frac{\ddot{\theta}}{3} = -\omega^2\left(\frac{\sin(2\theta)}{6} + \frac{\sin\theta}{4}\right) + \frac{g}{2a}\cos\theta$$

2.4.1. Conservación del Hamiltoniano

Como el Lagrangiano no depende del tiempo se conserva el Hamiltoniano. Pero en este caso la energía cinética no es función cuadrática homogénea, por lo que deberemos calcular explícitamente el Hamiltoniano, basta con agregar el potencial gravitatorio al caso anterior.

$$H = \dot{\theta}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} - \mathcal{L} = \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{6}ma^2\omega^2\cos^2(\theta) - \frac{1}{4}ma^2\omega^2\cos\theta + mg\frac{a}{2}\sin\theta$$

que podemos expresarlo como:

$$\frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta) = H \qquad V_{eff}(\theta) = -\frac{1}{6}ma^2\omega^2\cos^2(\theta) - \frac{1}{4}ma^2\omega^2\cos\theta + mg\frac{a}{2}\sin\theta$$

Podemos ver que los valores de equilibrio hallados corresponden a valores extremos del potencial efectivo $V_{eff}(\theta)$. En el caso de equilibrio estable $V_{eff}(\theta)$ es mínimo, en el caso de equilibrio inestable $V_{eff}(\theta)$ es un máximo. La gravedad deplaza el mínimo de $\theta = 0$ a un valor negativo. El potencial efectivo no es simétrico alrededor de $\theta = 0$.

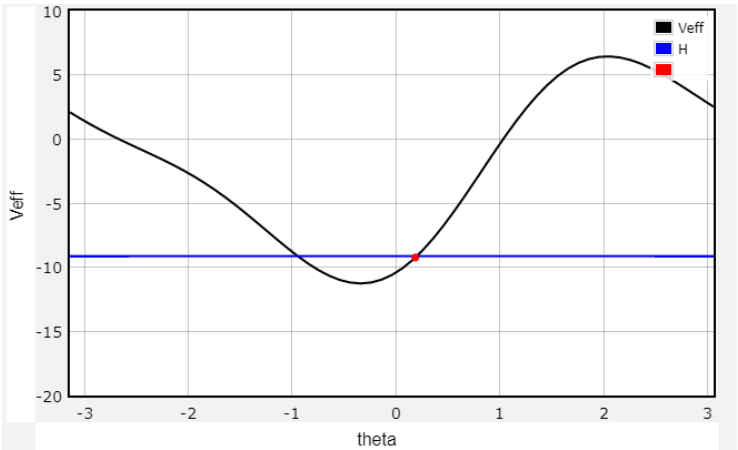

Figura 3: *Forma funcional del potencial efectivo con gravedad. El equilibrio estable se desplaza hacia menores valores de $\theta = 0$*

3. Solución del Problema 11

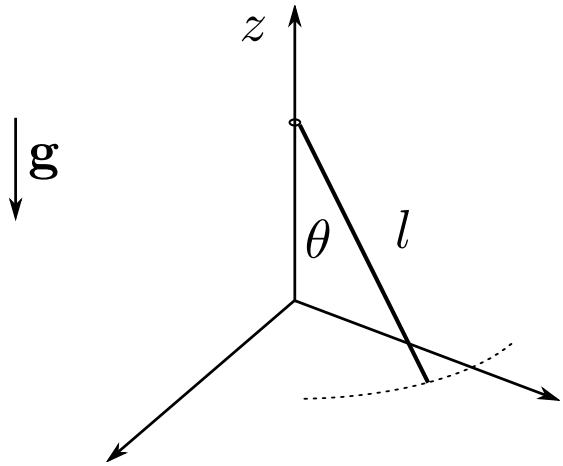

Figura 4: *Una varilla rota y desliza sobre el plano con un punto sobre el eje z.*

Una elección de coordenadas del problema son: θ (en el dibujo) y φ, la coordenada polar del punto de la barra en contacto con en el plano. Si elegimos