**Guía de ejercicios adicionales - Mecánica Clásica 2014 - Clase G. Mindlin.**

## Problema 1

Bajo la acción de la gravedad, una partícula de masa $m$ se desliza sin rozamiento sobre una supeficie cónica definida por $\theta = \alpha$, donde $\theta$ es el ángulo polar de las coordenadas esféricas.

a) Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula utilizando como coordenadas generalizadas el ángulo $\phi$ y el radio $r$ de las coordenadas esféricas habituales. Encuentra alguna coordenada cíclica? En caso de encontrarla, qué cantidad se conserva? lo vincula con alguna magnitud física?.

b) Usando la conservación hallada en el ítem anterior halle el potencial efectivo unidimensional equivalente. Muestre que las órbitas circulares son posibles y halle la velocidad de la partícula en tales órbitas.

c) Usando la conservación de energia mecánica y el potencial efectivo unidemsional, encuentre el $r$ máximo y el $r$ mínimo para el caso en que $\alpha = 30°$ y las condiciones iniciales sean $r(0) = a$, $\dot{r}(0) = 0$, $\dot{\phi}(0)^2 = 4\sqrt{3}g/a$ (ayuda: note que si presta atención al enunciado, uno de los dos $r$ pedido es dato).

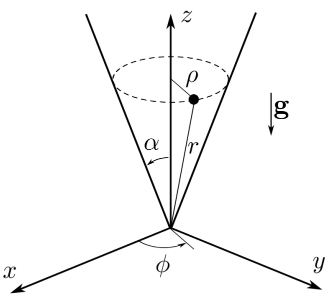


Figure 1: Problema 1

## Problema 2

Considere el péndulo plano doble de la figura 2.

a) Encuentre las ecuaciones de movimiento.

b) Halle una expresión aproximada de las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.

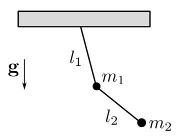


Figure 2: Problema 2

## Problema 3

Encuentre el lagrangiano de los sistemas de la figura 3.

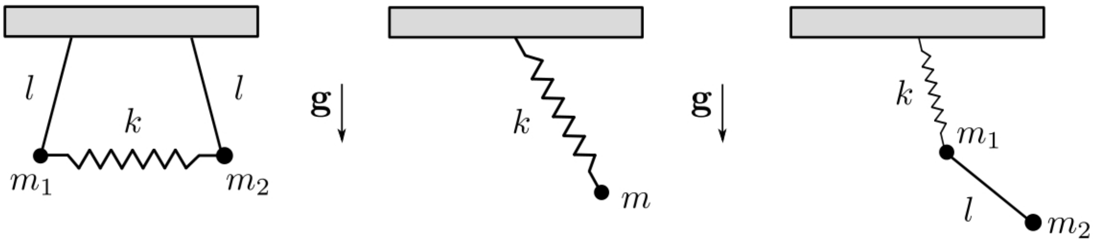


Figure 3: Problema 3

## Problema 4

Considere un alambre enrollado de forma helicoidal, cuya trayectoria se puede describir en coordenadas cilindricas como $\rho = R$ y $z = \lambda\phi$, con $\lambda$ y $R$ constantes y $z$ el eje vertical. Usando la coordenada $z$ como coordenada generalizada, escriba el Lagrangeano del una masita enhebrada en este alambre. Encuentre las ecuaciones de Lagrange y obtenga la aceleración vertical. Qué ocurre con esta aceleración cuando $R \longrightarrow 0$? (ayuda: recuerde que sólo precisa encontrar una expresión para la velocidad de la masita, para ello escriba la velocidad en cilíndricas y aproveche las expresiones de la forma helicoidal ya que la masa se mueve sobre el alambre).

## Problema 5

¿Qué componentes de $\bar{p}$ y $\bar{L}$ se conservan para el movimiento de una partícula en los siguientes campos?

a) De simetría elipsoidal ($a \neq b \neq c$).

b) Las superficies equipotenciales son planos homogéneos infinitos.

c) Las superficies equipotenciales son cilindros infinitos.

d) De simetría helicoidal.

e) Campo debido a una red unidimensional de cargas positivas separadas entre sí una distancia $d$ constante.

f) De simetría toroidal.

## Problema 6

¿Cómo serían las órbitas de los planetas si el potencial gravitatorio solar tuviera simetría cilíndrica?.

## Problema 7

Suponga una partícula de masa $m$ sometida a un potencial externo $V$. Considere los casos en que el potencial presenta las siguientes invariancias (con $\delta$ arbitrario pero pequeño):

a) $V(x, y, z) = V(x, y, z + \delta)$

b) $V(x, y, z) = V(x + 3\delta, y - 2\delta, z + \delta/2)$

c) $V(x, y, z) = V(x, y + z\,\delta, z - y\,\delta)$

d) $V(\rho, \theta, \phi) = V(\rho + \delta, \theta, \phi)$

e) $V(\rho, \phi, z) = V(\rho, \phi + \delta, z + 5a\,\delta/8)$

Encontrar en cada caso, si existen, constantes de movimiento relacionadas con estas invariancias.

## Problema 8

Una masa $m$ se desliza sobre una semiesfera de radio $R$. Escriba las dos ecuaciones de Lagrange modificadas en coordenadas polares $(r, \theta)$ y encuentre la fuerza de contacto entre la superficie y la masa. Diga para qué valor de $\theta$ la masa se separa de la superficie, considerando que se la suelta desde $\theta_o$.

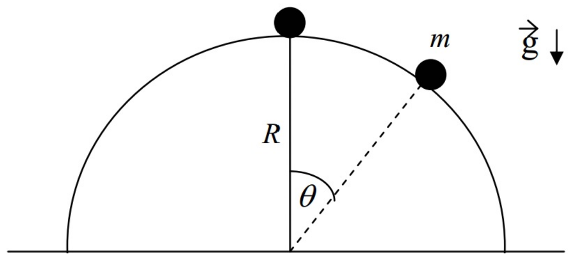


Figure 4: Problema 7

## Problema 9

El potencial de un oscilador isótropo es $V = k\,r^2/2$.

a) Dibuje el potencial efectivo para un caso general.

b) Discuta los movimientos posibles en función del valor del momento angular y las condiciones iniciales.

c) Encuentre el período para el caso en que la órbita es circular.

d) Describa la naturaleza de las órbitas cuando difieren levemente de la órbita circular.