Guía 8 - Transformaciones Canónicas-Corchetes de Poisson- Mecánica Clásica 2014 - Clase G. Mindlin.

Problema 1

Considere los siguientes puntos:

- Pruebe que si se hace una transformación canónica de (p, q) a (P, Q) se tiene que: $\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}$; $\frac{\partial q_i}{\partial P_j} = \frac{-\partial Q_j}{\partial p_i}$; $\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial q_i}$ y $\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$
- Considere un oscilador de hamiltoniano $H = p^2/2m + (k/2)q^2$ y muestre que la transformación= $Q = ln(\frac{sinp}{q})$, $P = qcot(p)$, es canónica y determine las generatrices $F_1(q, Q)$ y $F_2(q, P)$.

Problema 2

Considere el oscilador bidimensional cuyo hamiloniano es:

$$H(p, q) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + m\omega^2/2(x^2 + y^2). \qquad (1)$$

Muestre que la transformación que sigue es canónica y halle el nuevo hamiltoniano $H'(P, Q)$ y las correspondientes ecuaciones de Hamilton: $x = Xcos\lambda + \frac{P_y sin\lambda}{m\omega}$; $y = Ycos\lambda + \frac{P_x sin\lambda}{m\omega}$; $p_x = -m\omega Y sin\lambda + P_x cos\lambda$ y $p_y = -m\omega X sin\lambda + P_y cos\lambda$. Describa además el movimiento del oscilador bidimensional cuando $y = p_y = 0$ en el $t = 0$.

Problema 3

- Bajo qué condiciones pueden ser H y L^2 simultáneamente variables canónicas? Idem para H y L_z.
- Pueden ser L_x y L_y simultáneamente variables canónicas? Ídem para L_x

Problema 4

Para un oscilador armónico unidimensional, halle la transformación canónica de cuya función generatriz es $F_1(q, Q) = \lambda q^2 cotg(Q)$ y elija λ para que el nuevo Hamiltoniano $K(Q, P)$ sea $H = \omega P$ con ω la frecuencia de oscilación del oscilador armónico.

Problema 5

Demuestre la siguientes propiedades de los corchetes de Poisson, siendo $f; g; h$ funciones arbitrarias de p_i, q_i; $F(f)$ es una función de f y c es una constante:

- $[f, c] = 0; [f, f] = 0; [f, g] + [g, f] = 0; [f + g, h] = [f, h] + [g, h]; f[g, h] = f[g, h] + [f, h]g; \frac{\partial [f,g]}{\partial t} = [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}, f]; [f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0; [f, F(f)] = 0$
- $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0; [q_i, p_j] = \delta_{ij}$

Problema 6

Muestre que si f y g son constantes de movimiento, también lo es $[f, g]$. Además calcule explícitamente, para una partícula, los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas de $\overrightarrow{L}$ con las de $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{r}$. También calcule $[L_x, L^2], [L_y, L^2], [L_z, L^2]$ donde $L^2 = |\overrightarrow{L}^2|$.

Problema 7

Demuestre que $\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$. Qué se obtiene para los casos donde $f = q_i$ o $f = p_i$? Si f no depende explícitamente del tiempo, muestre que la condición necesaria y suficiente para que f sea una constante del movimiento es que $[f, H] = 0$.