Guía 3 - Fuerza central entre dos cuerpos - Mecánica Clásica 2014 - Clase G. Mindlin.

Problema 1

Considere el sistema de dos masas inteactuando mediante una fuerza central. Demuestre que en el sistema de referencia del centro de masa (CM) el momento angular $\overrightarrow{l_1}$ de la particula 1 cumple con el momento angular total $\overrightarrow{L}$ la relación $\overrightarrow{l_1} = (m_2/M)\overrightarrow{L}$ y que a su vez $\overrightarrow{l_2} = (m_1/M)\overrightarrow{L}$. Se conservan l_1 y l_2 por separado en el sistema del CM? Y en otro sistema de referencia fijo en un punto del espacio que no sea el CM?

Problema 2

Considere dos partículas interactuando mediante la Ley de Hooke con una energía potencial $U = 1/2kr^2$, donde $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}$ y no existen fuerzas externas apliadas sobre el sistema. Demuestre que $\overrightarrow{r(t)}$ describe una elipse. Por lo tanto pruebe que las dos partículas se mueven sobre una elipse similar alrededor del CM del sistema de ambas.[ayuda: elija el plano xy como el plano de la óribita y resuelva la ecuación del movimiento para x e y por separado, de esta forma $x = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$, con similar expresión para y. Despeje $cos(\omega t)$ y $sin(\omega t)$ y uego use la identidad $sin^2 + cos^2 = 1$ para demostrar que es una elipse la órbita resultante.]

Problema 3

A partir de analizar el potencial efectivo típico de un sistema de dos cuerpos interactuando gravitatoriamente (como ser un planeta y el sol, $U(r)_{ef} = -Gm_1m_2/r + l^2/(2\mu r)$) encuentre el radio para el cual el planeta, con momento angular l, puede orbitar con trayectorias circulares alrededor del sol. Luego pruebe que esta órbita circular es estable, en el sentido que pequeñas pertubaciones a dicha órbita sólo causan pequeñas oscilaciones radiales. Muestre que el período de dichas oscilaciones es igual al período de la órbita del planeta.

Problema 4

En la derivación de la tercera ley de Kepler comunmente se aproxima $M_s >>> m$ basándose en que la masa del sol M_s es mucho mayor que la del planeta de masa m. De esta forma se llega a que $\tau^2 = [4\pi^2/(GM_s)]a^3$. Demuestre que la ley de forma exacta es en verdad $\tau^2 = [4\pi^2/(G(M_s + m))]a^3$ y que por lo tanto la “constante“ de proporcionalidad en un poco diferente para los distintos planetas. Considerando que la masa del planeta más pesado (Júpiter) es alrededor de $2x10^{27}\ kg$, mientras que la del sol M_s es cercana a $2x10^{30}\ kg$ qué porcentaje esperaría que varíe la ”constante“ de la tercera ley de Kepĺer al variar los planetas (considerando que la mayoría de los planetas tiene varios órdenes de magnitud menor masa que Júpiter).

Problema 5

Considere dos particulas de igual masa $m_1 = m_2 = m$ unidas entre sí por un resorte en línea recta (constante elástica k y longitud natural l) y libre de moverse sobre una mesa sin rozamiento.
a) Escriba el Lagrangiano en términos de las coordenadas r_1 y r_2 y luego reescribalo en términos del CM y la posición relativa, R y r, usando coordenadas polares para (r, ϕ).
b) Escriba y resuelva las ecuaciones de Lagrange para las coordenadas del CM (X e Y).
c) Escriba el Lagrangeano para r y ϕ y resuélvalo para los casos particulares en donde r se mantiene constante y en donde ϕ se mantiene constante. Describa los moviemientos correspondientes, en particular muestre que la frecuencia de oscilación del segundo caso es $\omega = \sqrt{2k/m_1}$.

Problema 6

La altura de un satélite en el perigeo (punto de mayor cercanía a la tierra) es de 300 km respecto de la superficie terrestre y en el apogeo (punto de mayor lejanía) es de 3000 km. Calcule la excentricidad de la elipse. Ahora, considere que la órbita tiene lugar en el plano xy y que el eje mayor de la elipse es el eje x que une la Tierra con el origen, calcule la altura del satélite cuando corta al eje y. [ayuda: el radio de la Tierra es $R_T = 6{,}4x10^6$ km y $GM_t/R_T^2 = g$].

Problema 7

Una partícula de masa m se mueve con momento angular l en el campo de una fuerza central fija de la forma:

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{\lambda}{r^3} \tag{1}$$

con λ y k constantes positivas. Escriba la ecuación radial transformada para esta fuerza y pruebe que las óribitas tienen la forma:

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon cos(\beta\phi)} \tag{2}$$

donde c y β son constantes positivas. Encuentre el valor de dichas constantes en términos de los parámetros del problema y describa las óribitas para el caso $0 < \epsilon < 1$. Para qué valores de β son cerradas las óribitas? Qué ocurre cuando $\lambda \longrightarrow 0$?

Problema 8

Considere la partícula del problema anterior, perosuponga que ahora la constante λ es negativa. Escriba la ecuación radial transformada y describa las órbitas de bajo momento angular (específicamente cuando $l^2 < -\lambda m$).

Problema 9

En el problema de Kepler se tiene que el comportamiento de las órbitas en polares $r(\phi)$ está dado por $r(\phi) = c/(1 + \epsilon cos\phi)$, que para $\epsilon < 1$ resultan órbitas ligadas. Reescriba las óribitas en coordenadas Cartesianas para los casos $\epsilon = 1$ y $\epsilon > 1$. Muestre que para el primer caso se obtiene una parábola y que para el segundo un hipérbola. Explicite los parámetros característicos de ambas curvas en función de c y ϵ.