Guía 5 - Cuerpo Rígido -Segunda parte - Mecánica Clásica 2014 - Clase G. Mindlin.

Problema 1

Un cuerpo rígido consiste en tres masas enganchadas por barras de masa despreciable de la siguiente manera: una masa m en la posición $(a, 0, 0)$, otra $2m$ en $(0, a, a)$ y la última $3m$ en $(0, a, -a)$. Calcule el tensor de inercia I, y luego encuentre los momentos principales de inercia y un conjunto ortogonal de ejes principales.

Problema 2

Un triángulo metálico plano y angosto se encuentra en plano xy con los vértices en $(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 0)$. La densidad de masa (masa/área) es $\sigma = 24$ (la distancia y la masas están medidas en unidades inespecíficas y el valor de 24 es arbitrario para que las cuentas queden más simples). Encuentre el momento de inercia I del triángulo, luego encuentre los momentos principales y los ejes correspondientes.

Problema 3

Pruebe que los momentos principales de un cuerpo rígido satisfacen $\lambda_3 \leq \lambda_1 + \lambda_2$. [ayuda: utilice las integrales que definen dichos momentos]. Indique para qué geometría se cumple la igualdad.

Problema 4

Un caso particular de movimiento del trompo simétrico visto en clase es cuando el trompo gira sobre un eje vertical. Analice el movimiento del mismo de la siguiente manera: 1) Observando el potencial efectivo $U_{eff} = \frac{(L_z - L_3 cos\theta)^2}{2\lambda_1 sin^2\theta} + \frac{L_3^2}{2\lambda_3} + MRgcos\theta$, demuestre que si en algún tiempo $\theta = 0$ entonces $L_3 = L_z$. 2) Sabiendo que $L_3 = \lambda_3\omega_3$, haga un desarrollo de Taylor a segundo orden del potencial efectivo alrededor de $\theta = 0$ y demuestre que para valores de $\omega_3 > \omega_{min}$ la rotación a $\theta = 0$ es estable (con $\omega_{min} = 2\sqrt{MgR\lambda_1/\lambda_3^2}$), pero que si $\omega_3 < \omega_{min}$ es insestable.

Problema 5

Se tienen dos placas de lados a y b cuyo espesor es despreciable. Una de ellas está fija por su centro de masa a un eje que gira con velocidad angular $\Omega = cte$. La otra placa está unida a la anterior por una bisagra ideal que le permite moverse como se indica en la figura. Determinar:

- El Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento en ausencia de gravedad.
- Existe algún punto de equilibrio estable?
- El Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento con gravedad.
- Existe ahora algún punto de equilibrio estable?

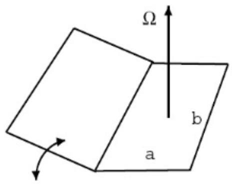

Figure 1: Esquema del sistema del problema 5

Problema 6

Si se arroja un objeto con los tres momentos principales de inercia distintos,de tal manera que gire alrededor de un eje principal con momento de inercia máximo o mínimo, el movimiento es relativamente estable, pero si se lo arroja tratando que gire alrededor del eje principal con momento intermedio, el movimiento es muy irregular ya que se ven grandes cambios en la posición del eje de rotación respecto del cuerpo (puede hacer la prueba con un borrador). Demuéstrelo utilizando las ecuaciones de Euler: muestre que cuando un cuerpo rígido en un campo gravitacional uniforme rota alrededor de un eje con momento de inercia máximo o mínimo, el movimiento es estable y es inestable si el eje corresponde al momento intermedio.[ayuda: suponga que inicialmente tiene la velocidad angular casi paralela a un eje principal y vea como evolucionan las componentes chicas].

Problema 7

Un cilindro circular sólido de mas m, radio a y largo l, está suspendido de un eje transversal a través de su centro de masa (ver figura). Este eje gira con velocidad angular constante Ω. Suponiendo $l > \sqrt{3}a$, encontrar las posiciones de equilibrio estable y las frecuencias de oscilación para pequeños apartamientos de la misma.

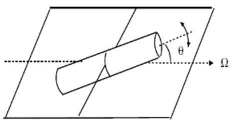

Figure 2: Esquema del sistema del problema 7