

Problema 1

Considere la máquina de Atwood de la figura, pero suponga que la polea es un disco de masa uniforme de masa M y radio R . Usando x como la coordenada generalizada, escriba el Lagrangiano, el momento generalizado p y el Hamiltoniano $\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L}$. Encuentre las ecuaciones de Hamilton y úselas para encontrar la aceleración.

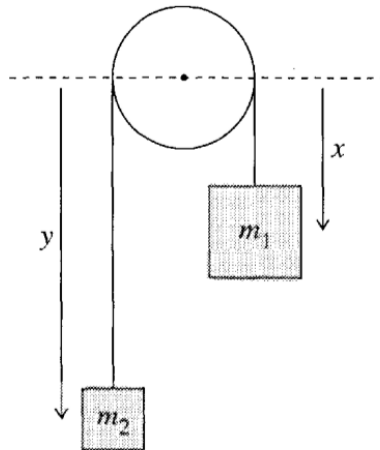


Figure 1: Esquema del sistema del problema 1

Problema 2

Una bolita de masa m se encuentra enhebrada en un alambre que se enrolla en forma helicoidal cumpliendo la relación en coordenadas polares (ρ, ϕ, z) de $z = c\phi$ y $\rho = R$, con R y c constantes. El eje z está en la vertical en dirección hacia arriba y la gravedad en el mismo eje en dirección hacia abajo. Usando ϕ como coordenada generalizada, escriba la energía cinética T y la potencial U y luego escriba el Hamiltoniano $\mathcal{H}$ como una función de ϕ y del momento conjugado p . Escriba las ecuaciones de Hamilton y resuelva para $\ddot{\phi}$ y por lo tanto encuentre también $\ddot{z}$. Explique el resultado en términos de la mecánica Newtoniana y discuta el caso especial donde $R = 0$.

Problema 3

Una carrito de una montaña rusa de masa m se mueve a lo largo de un riel sin rozamiento dispuesto en el plano xy (x coordenada horizontal e y vertical hacia arriba). La altura del riel se puede parametrizar como cierta función de x como: $y = h(x)$. Usando x como coordenada generalizada, escriba el Lagrangiano, el momento generalizado p y el Hamiltoniano $\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L}$ (como función de x y p). Encuentre las ecuaciones de Hamilton

Problema 4

Sea una partícula de masa m moviéndose en dos dimensiones sujeta a una fuerza $F = -k\ddot{x} + K\ddot{y}$, donde k y K son constantes positivas. Escriba el Hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton usando x e y como coordenadas generalizadas. Resuelva y describa el movimiento resultante.

Problema 5

La forma simple del Hamiltoniano $\mathcal{H} = T + U$ es solo válida si las coordenadas generalizadas son naturales (i.e, la relación entre las coordenadas generalizadas y las cartesianas es independiente del tiempo). Sin embargo si las coordenadas no son naturales dicha forma no es válida y por ende el Hamiltoniano se calcula por definición. Pruebe que para el caso de una bolita de masa m enhebrada en un riel horizontal unidimensional sin rozamiento rotando con velocidad ω respecto a un eje vertical que pasa por el centro del riel, la forma simple no es válida.

Problema 6

Considere una bolita de masa m cuyo movimiento está restringido a moverse en un cilindro sin rozamiento de radio R , que en coordenadas polares (ρ, ϕ, z) se escribe como $\rho = R$. La bolita se encuentra sometida a una fuerza externa $\vec{F} = -kr\ddot{r}$, donde k es una constante positiva y r es la distancia al origen. Usando z y ϕ como coordenadas generalizadas, encuentre el hamiltoniano $\mathcal{H}$, escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton. Describa el movimiento.

Problema 7

Considere el problema de una masa realizando un movimiento confinado a la superficie de un cono. Se vio en clase que el movimiento está acotado a desarrollarse entre dos alturas z_{min} y z_{max} . Cuando z es máximo o mínimo la velocidad en z debe ser cero ($\dot{z} = 0$). Demuestre que esto pasa si y solo si el momento conjugado $p_z = 0$ y use que $\mathcal{H} = E$, donde $\mathcal{H}$ es el Hamiltoniano del sistema, para demostrar que a una energía dada E , esto ocurre para dos valores de z exactamente. Para ello parta del Hamiltoniano para el caso $p_z = 0$ y grafique el comportamiento como función de z . A partir de dicho gráfico describa el movimiento de la masa.

Problema 8

Considere una masa m moviéndose en dos dimensiones bajo el efecto de una fuerza sencilla F que no depende de r ni de t . Encuentre el potencial $U(r)$ y el Hamiltoniano. Demuestre que usando coordenadas rectangulares x e y con x en la dirección de la fuerza F , la coordenada y es ignorable. Demuestre asimismo que si usa coordenadas rectangulares pero la fuerza no coincide con ninguno de los ejes, entonces ninguna coordenada es ignorable.