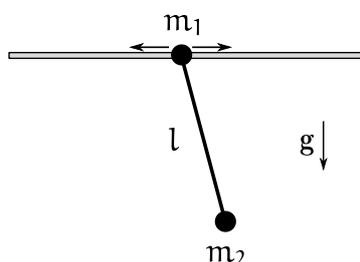


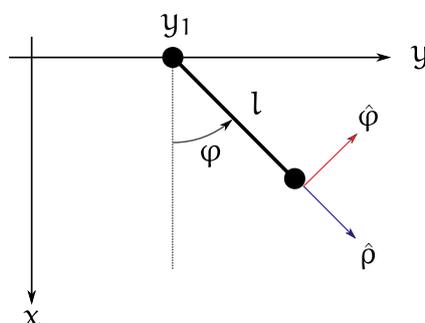
## Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2017 (B)

### Guía 2: Aplicación del principio de d'Alembert al problema 17.\*

A propósito del cálculo que quedó incompleto en la clase del jueves 24/8. Se trataba del siguiente sistema:



Evidentemente es un sistema con dos grados de libertad. Eligiendo los ejes como muestra la figura, podemos ubicar a la partícula 1 en la posición  $y_1$ , por ejemplo, y luego inclinar la barra un ángulo  $\varphi$ .



Con esas dos coordenadas, la configuración del sistema queda completamente definida. Las incógnitas en este problema serían entonces las funciones del tiempo  $y_1(t)$  y  $\varphi(t)$  y las fuerzas de vínculo que mantienen a la partícula 1 sobre el eje  $y$  y a la partícula 2 a una distancia  $l$  de la partícula 1.

La idea en clase era mostrar que a partir de ciertas operaciones, aparentemente inmotivadas, se podían obtener las ecuaciones de movimiento sin necesidad de calcular las fuerzas de vínculo. Así, varias incógnitas quedarían eliminadas de manera automática. Estas operaciones, no del todo comprensibles en un principio, consistían en tomar las ecuaciones de Newton para cada partícula,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i, \quad (1)$$

hacer su producto escalar con las variaciones  $\delta \mathbf{r}_i$  que se obtienen al cambiar infinitesimalmente la configuración del sistema, y, por último, sumar ambos resultados. Es decir, escribir lo siguiente:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2. \quad (2)$$

Puesto que esta igualdad es una consecuencia directa de las ecuaciones de Newton, no parece que hallamos ganado ninguna información extra. Por el contrario, da la impresión

\*Libro de quejas a su disposición: zanellaj@df.uba.ar

de que hemos disminuido el número de ecuaciones con las que contábamos originalmente sin disminuir al mismo tiempo el número de incógnitas.

En verdad no se ha perdido tanta información como parece. Debido a que las variaciones  $\delta \mathbf{r}_1$  y  $\delta \mathbf{r}_2$  dependen de las variaciones  $\delta y_1$  y  $\delta \varphi$ , que son independientes, en realidad la operación contenida en la ec. (2) da dos ecuaciones independientes, según se proyecte en las direcciones en que, por ejemplo,  $\delta y_1 = 0$  o  $\delta \varphi = 0$ . En efecto, por definición

$$\delta \mathbf{r}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \varphi} \delta \varphi. \quad (3)$$

Sustituyendo en la ec. (2) y agrupando términos proporcionales a cada variación, queda

$$\begin{aligned} & \left[ (m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{F}_1) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y_1} + (m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{F}_2) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial y_1} \right] \delta y_1 + \\ & \left[ (m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{F}_1) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \varphi} + (m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{F}_2) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \varphi} \right] \delta \varphi = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Debido a que las variaciones  $\delta y_1$  y  $\delta \varphi$  son independientes, según anticipamos hay aquí contenidas dos ecuaciones:

$$(m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{F}_1) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y_1} + (m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{F}_2) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial y_1} = 0, \quad (5)$$

$$(m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{F}_1) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \varphi} + (m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{F}_2) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \varphi} = 0. \quad (6)$$

Y, puesto que sólo hay dos grados de libertad, no es descabellado esperar que esas dos proyecciones contengan toda la información necesaria para resolver el problema.

Pero estos planes tan optimistas corren aún el riesgo de verse frustrados por las fuerzas de vínculo. Se trata de contar cuántas ecuaciones tenemos para cuántas incógnitas. Ya hemos usado los vínculos geométricos para eliminar dos de los cuatro grados de libertad asociados a un par de partículas en el plano. Nuestras dos primeras incógnitas son entonces las funciones  $y_1(t)$  y  $\varphi(t)$ . Pero quedan aún por determinar las dos fuerzas de vínculo, lo que da un total de cuatro incógnitas. De manera que, en principio, las dos ecuaciones (5) y (6) resultarían insuficientes, **a menos que** las fuerzas de vínculo tengan la decencia de cancelarse en el camino.

Dicho de otro modo: si luego de escribir la ec. (2), equivalente al par de ecuaciones (5) y (6), las fuerzas de vínculo continuaran ahí, entonces no habríamos avanzado gran cosa. Pero si, al calcular el segundo miembro de la ec. (2),

$$\mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2, \quad (7)$$

llegara a suceder (y quién puede decir que no sea posible, y hasta probable, o al menos concebible) que las fuerzas de vínculo se cancelaran, entonces las dos ecuaciones (5) y (6) serían suficientes para encontrar las dos funciones  $y_1(t)$  y  $\varphi(t)$ , que son el objetivo primordial. El punto central que lleva a escribir la tan extraña ec. (2) es justamente esa cancelación de las fuerzas de vínculo, como veremos a continuación.

Usando las coordenadas generalizadas  $y_1$  y  $\varphi$  para describir la configuración del sistema de las dos partículas, tenemos:

$$\mathbf{r}_1(y_1, \varphi) = y_1 \hat{y}, \quad (8)$$

$$\mathbf{r}_2(y_1, \varphi) = y_1 \hat{y} + l \hat{\rho}(\varphi). \quad (9)$$

Al variar  $y_1$  en  $\delta y_1$  y  $\varphi$  en  $\delta \varphi$ , las variaciones de las posiciones de las dos partículas son:

$$\delta \mathbf{r}_1(y_1, \varphi) = \delta y_1 \hat{y}, \quad (10)$$

$$\delta \mathbf{r}_2(y_1, \varphi) = \delta y_1 \hat{y} + l \delta \varphi \hat{\rho}(\varphi). \quad (11)$$

Recordar que por *variación* entendemos los términos lineales en  $\delta y_1$  y  $\delta \varphi$  en el desarrollo de Taylor de

$$\mathbf{r}_i(y_1 + \delta y_1, \varphi + \delta \varphi) - \mathbf{r}_i(y_1, \varphi). \quad (12)$$

Es decir,

$$\delta \mathbf{r}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \varphi} \delta \varphi. \quad (13)$$

Además hemos usado que

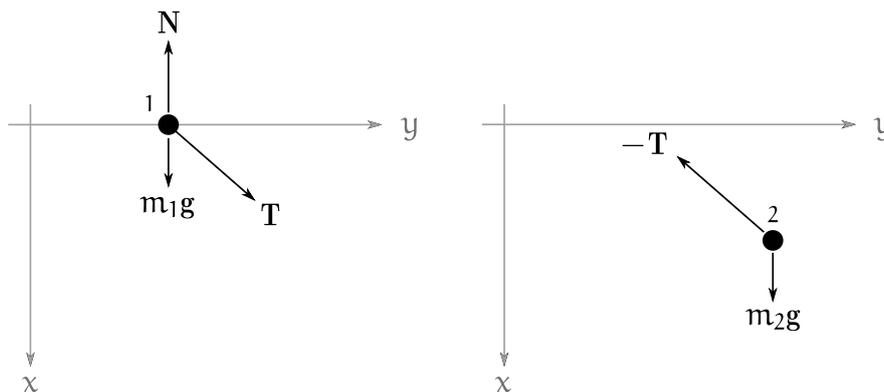
$$\frac{\partial \hat{\rho}(\varphi)}{\partial \varphi} = \hat{\rho}(\varphi). \quad (14)$$

Esto último puede verse derivando explícitamente la expresión de  $\hat{\rho}(\varphi)$  en coordenadas cartesianas:

$$\hat{\rho}(\varphi) = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y} \rightarrow \frac{\partial \hat{\rho}(\varphi)}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} = \hat{\rho}(\varphi). \quad (15)$$

Recapitulando: las ecs. (10) y (11) dan las variaciones  $\delta \mathbf{r}_i$  en la posición de cada partícula en términos de las coordenadas generalizadas,  $y_1$  y  $\varphi$ , y de sus variaciones,  $\delta y_1$  y  $\delta \varphi$ .

Ahora estudiemos las fuerzas sobre cada partícula.



Como muestran los diagramas de cuerpo libre, resultan:

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{T}, \quad (16)$$

$$\mathbf{F}_2 = m_2 \mathbf{g} - \mathbf{T}, \quad (17)$$

donde parte de nuestras hipótesis quedan expresadas en las siguientes elecciones:

$$\mathbf{N} = -N \hat{\mathbf{x}}, \quad (18)$$

$$\mathbf{T} = T \hat{\rho}(\varphi). \quad (19)$$

Esto debe considerarse como un par de relaciones constitutivas que simplemente postulamos.<sup>†</sup> Resumiendo:

$$\mathbf{F}_1 = (m_1 g - N) \hat{\mathbf{x}} + T \hat{\rho}(\varphi), \quad (20)$$

$$\mathbf{F}_2 = m_2 g \hat{\mathbf{x}} - T \hat{\rho}(\varphi). \quad (21)$$

Notar que  $N$  y  $T$  siguen siendo parte de las incógnitas del problema. Nuestro primer objetivo es calcular el segundo miembro de la ec. (2), esto es:

$$\delta \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{F}_1 + \delta \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{F}_2. \quad (22)$$

A partir de  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  y de las ecs. (10) y (11) calculamos  $\delta \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i$  para cada partícula. Para la primera obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{F}_1 &= \delta y_1 \hat{\mathbf{y}} \cdot \left[ (m_1 g - N) \hat{\mathbf{x}} + T \hat{\rho}(\varphi) \right] \\ &= \delta y_1 T \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\rho}(\varphi), \end{aligned} \quad (23)$$

eliminando en el acto la fuerza  $N$ . Para la segunda partícula es un poco más complicado, pero son todas operaciones elementales:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{F}_2 &= \left[ \delta y_1 \hat{\mathbf{y}} + l \delta \varphi \hat{\varphi}(\varphi) \right] \cdot \left[ m_2 g \hat{\mathbf{x}} - T \hat{\rho}(\varphi) \right] \\ &= -\delta y_1 T \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\rho}(\varphi) + \delta \varphi m_2 g l \hat{\varphi}(\varphi) \cdot \hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Al sumar estos dos resultados, (23) y (24), los términos en donde aparece la tensión  $T$  **se cancelan**, y resulta:

$$\delta \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{F}_1 + \delta \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{F}_2 = \delta \varphi m_2 g l \hat{\varphi}(\varphi) \cdot \hat{\mathbf{x}} = -\delta \varphi m_2 g l \sin \varphi. \quad (25)$$

Resumiendo: lo que hemos hecho ha sido operar sobre el segundo miembro de las ecuaciones de Newton  $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$ , haciendo el producto escalar con  $\delta \mathbf{r}_i$  y sumando los resultados obtenidos para cada partícula. Lo que debemos hacer ahora es realizar las mismas operaciones sobre el primer miembro de las ecuaciones de Newton. Es decir, debemos

<sup>†</sup>En esta elección hemos pasado de contrabando todo un cargamento de elefantes blancos.

calcular el primer miembro de la ec. (2),

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2. \quad (26)$$

Para eso necesitamos escribir las aceleraciones de cada partícula en función de  $y_1$ ,  $\varphi$  y sus derivadas. A partir de las ecs. (8) y (9) se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{y}_1 \hat{\mathbf{y}}, \quad (27)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{y}_1 \hat{\mathbf{y}} + l\ddot{\varphi} \hat{\varphi}(\varphi) - l\dot{\varphi}^2 \hat{\rho}(\varphi). \quad (28)$$

Para escribir  $\ddot{\mathbf{r}}_2$  hemos usado que

$$\frac{d\hat{\rho}(\varphi)}{dt} = \frac{\partial \hat{\rho}(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \hat{\varphi}(\varphi), \quad (29)$$

y que

$$\frac{d}{dt} [\dot{\varphi} \hat{\varphi}(\varphi)] = \dot{\varphi}^2 \frac{\partial \hat{\varphi}(\varphi)}{\partial \varphi} + \ddot{\varphi} \hat{\varphi}(\varphi) = -\dot{\varphi}^2 \hat{\rho}(\varphi) + \ddot{\varphi} \hat{\varphi}(\varphi). \quad (30)$$

Tomando los productos escalares con cada  $\delta \mathbf{r}_i$  resulta:

$$\delta \mathbf{r}_1 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{y}_1 \delta y_1, \quad (31)$$

$$\delta \mathbf{r}_2 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_2 = [\ddot{y}_1 + l\ddot{\varphi} \hat{\varphi}(\varphi) \cdot \hat{\mathbf{y}} - l\dot{\varphi}^2 \hat{\rho}(\varphi) \cdot \hat{\mathbf{y}}] \delta y_1 + [l^2 \ddot{\varphi} + \ddot{y}_1 l \hat{\varphi}(\varphi) \cdot \hat{\mathbf{y}}] \delta \varphi. \quad (32)$$

Finalmente, usando que  $\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \sin \varphi$  y  $\hat{\varphi} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \cos \varphi$ , y sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} m_1 \delta \mathbf{r}_1 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \delta \mathbf{r}_2 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \\ &= [(m_1 + m_2) \ddot{y}_1 + m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)] \delta y_1 + m_2 l [l \ddot{\varphi} + \ddot{y}_1 \cos \varphi] \delta \varphi, \end{aligned} \quad (33)$$

que debe igualarse con la ec. (25), copiada aquí abajo:

$$\delta \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{F}_1 + \delta \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{F}_2 = -\delta \varphi m_2 g l \sin \varphi. \quad [25]$$

Puesto que las variaciones  $\delta y_1$  y  $\delta \varphi$  son independientes, lo que hay que igualar son los coeficientes que acompañan a estas variaciones en cada ecuación. En la ec. (25) no hay ningún término proporcional a  $\delta y_1$ , por lo tanto el término proporcional a  $\delta y_1$  en la ec. (33) debe anularse:

$$(m_1 + m_2) \ddot{y}_1 + m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 0. \quad (34)$$

Ésta es una de las ecuaciones de movimiento. Por otro lado, igualando los términos proporcionales a  $\delta \varphi$  en las ecs. (25) y (33) resulta

$$m_2 l (l \ddot{\varphi} + \ddot{y}_1 \cos \varphi) = -m_2 g l \sin \varphi, \quad (35)$$

que es la otra ecuación de movimiento. Así vemos cumplido nuestro objetivo.

## Resumen de lo ocurrido

La conclusión que nos llevamos de este problema es que la expresión

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2, \quad (36)$$

que en realidad contiene dos ecuaciones independientes, cada una asociada a la variación de una de las coordenadas generalizadas, permite encontrar las ecuaciones de movimiento sin necesidad de calcular las fuerzas de vínculo. Las expresiones en las que aparecían estas fuerzas en cada uno de los productos escalares  $\mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2$  se han o bien anulado automáticamente, como en el caso de la normal  $\mathbf{N}$ , o bien se han cancelado al hacer la suma  $\mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2$ , como en el caso de  $\mathbf{T}$ .

Esto podemos decirlo de otro modo. Clasifiquemos las fuerzas según sean fuerzas aplicadas o fuerzas de vínculo. Así tenemos

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(\text{ap})} + \mathbf{F}_i^{(\text{v})}, \quad (37)$$

donde, para cada partícula,

$$\mathbf{F}_1^{(\text{ap})} = m_1 \mathbf{g}, \quad \mathbf{F}_1^{(\text{v})} = \mathbf{N} + \mathbf{T}, \quad (38)$$

$$\mathbf{F}_2^{(\text{ap})} = m_2 \mathbf{g}, \quad \mathbf{F}_2^{(\text{v})} = -\mathbf{T}. \quad (39)$$

Lo que hemos encontrado es que

$$\mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_1^{(\text{ap})} \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2^{(\text{ap})} \cdot \delta \mathbf{r}_2, \quad (40)$$

o, dicho aún de otro modo,

$$\mathbf{F}_1^{(\text{v})} \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2^{(\text{v})} \cdot \delta \mathbf{r}_2 = 0, \quad (41)$$

Retransmitimos aquí abajo, en cámara lenta, esta emocionante cancelación:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{F}_1 + \delta \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{F}_2 &= \delta y_1 \hat{\mathbf{y}} \cdot \left[ (m_1 \mathbf{g} - \mathbf{N}) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{T} \hat{\boldsymbol{\rho}}(\varphi) \right] + \left[ \delta y_1 \hat{\mathbf{y}} + l \delta \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}(\varphi) \right] \cdot \left[ m_2 \mathbf{g} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{T} \hat{\boldsymbol{\rho}}(\varphi) \right] \\ &= \left[ \delta y_1 \mathbf{T} \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}(\varphi) \right] + \left[ -\delta y_1 \mathbf{T} \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}(\varphi) + m_2 g l \delta \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}(\varphi) \cdot \hat{\mathbf{x}} \right] \\ &= m_2 g l \delta \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}(\varphi) \cdot \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (42)$$

De manera que la ec. (36) no sólo contiene en realidad dos ecuaciones independientes sino que además estas ecuaciones no involucran a las fuerzas de vínculo. Es decir,

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_1^{(\text{ap})} \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2^{(\text{ap})} \cdot \delta \mathbf{r}_2, \quad (43)$$

o, más compactamente,

$$\left[ m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{F}_1^{(\text{ap})} \right] \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \left[ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{F}_2^{(\text{ap})} \right] \cdot \delta \mathbf{r}_2 = 0. \quad (44)$$

## El principio de d'Alembert y una interpretación geométrica

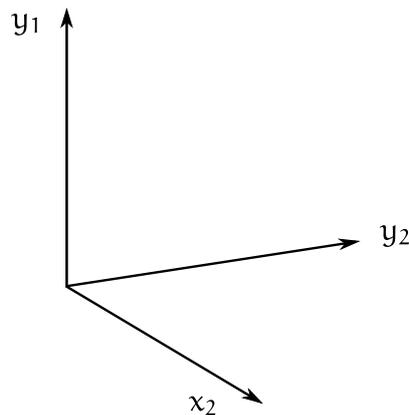
Admitimos que el procedimiento para llegar a las ecuaciones de movimiento resultó un tanto tortuoso, y, más aún, debemos confesar que no había ninguna razón naturalmente evidente para embarcarse en tales cálculos. La cuestión es que el procedimiento funcionó. Ahora queremos devolver la fe depositada en nuestros desvaríos explicando por qué las cosas funcionaron de la manera en que lo hicieron.

Aunque sus ventajas no sean apreciadas inmediatamente, el hecho fundamental es que gran parte de la mecánica puede formularse según la generalización del principio expuesto en la ec. (44), a saber:

$$\sum \left[ m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i^{(ap)} \right] \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (45)$$

llamado principio de d'Alembert. Este principio no es equivalente en general a la ley de movimiento de Newton, sino que contiene hipótesis extras, como evidencia el hecho de que sólo aparezcan las fuerzas aplicadas. En el ejemplo de las dos partículas que acabamos de ver, esas hipótesis adicionales estaban relacionadas especialmente con la direcciones de las fuerzas de vínculo:  $\mathbf{N}$  normal al eje  $y$ ,  $\mathbf{T}$  en la dirección del vector posición relativo entre las dos partículas, y además  $\mathbf{T}$  actuando sobre la partícula 1 y  $-\mathbf{T}$  sobre la partícula 2.

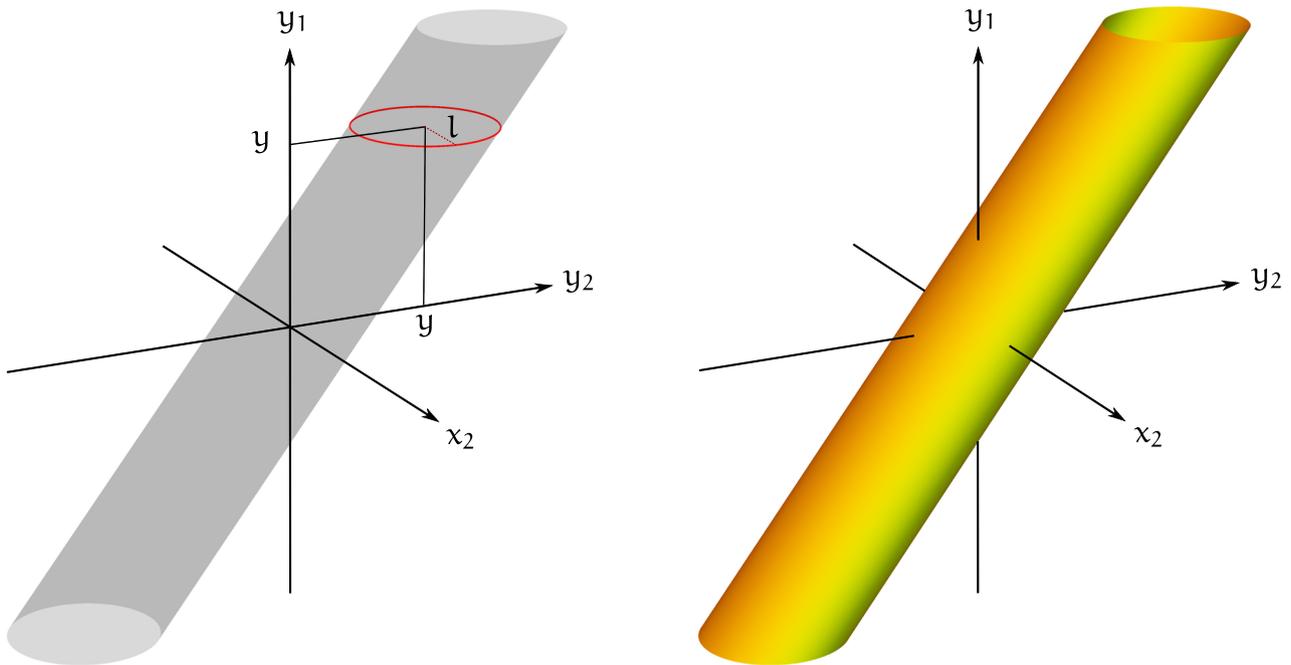
Al margen de eso, ahora nos interesa mostrar que, geoméricamente, lo que hemos hecho ha sido encontrar una analogía entre el movimiento de las dos partículas en el espacio real y el movimiento de un punto en un espacio abstracto, llamado espacio de configuración. En el caso de  $N$  partículas, este espacio es simplemente el espacio vectorial de  $3N$  dimensiones necesario para representar los  $N$  vectores  $\mathbf{r}_i$ . Si  $N = 1$  el espacio de configuración coincide con el espacio real. En general, cada punto en el espacio de configuración representa un estado del sistema, y la evolución del sistema corresponde entonces a una trayectoria del punto representativo en el espacio de configuración. El espacio de configuración para dos partículas tiene en principio 6 dimensiones. Pero, si restringimos a las dos partículas a moverse sobre el plano  $xy$  y a la primera partícula a moverse sobre el eje  $y$ , el espacio de configuración se reduce efectivamente a un espacio de 3 dimensiones. Entonces es fácil representar las cosas de manera gráfica. En este espacio de configuración restringido a 3 dimensiones podemos usar como coordenadas  $x_2$ ,  $y_2$  e  $y_1$ , como muestra la figura.



Teniendo en cuenta que existe el vínculo adicional que mantiene fija la distancia entre las dos partículas, en este espacio de 3 dimensiones el punto representativo del sistema no puede ocupar cualquier posición. La condición que expresa que la distancia entre las dos partículas es  $l$  queda escrita como

$$x_2^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2, \quad (46)$$

lo que define una superficie bidimensional. ¿Pero cuál? Para  $y_1 = y$  fijo, la expresión (46) es la ecuación de un círculo de radio  $l$  en el plano  $y_1 = y$ , centrado en la posición  $x_2 = 0$  e  $y_2 = y$ . Variando continuamente  $y$  iremos generando el cilindro que muestra la figura.



El punto representativo en el espacio de configuración se mueve sobre este cilindro. La descripción cinemática del movimiento de las dos partículas es así equivalente al movimiento de un punto sobre un cilindro.

Establecida esta correspondencia, que no es más que una equivalencia cinemática, lo que interesa ahora es encontrar, a partir de las leyes de Newton válidas para las dos partículas, cuál es la dinámica del punto representativo en el espacio de configuración. Dicho en otras palabras: no sólo el punto de representativo en el espacio de configuración sigue una trayectoria análoga a la que seguiría una partícula sobre un cilindro, sino que ese movimiento puede ser descrito por ecuaciones dinámicas que son equivalentes a la aplicación de ciertas fuerzas sobre el punto representativo, tal como si en verdad fuera una partícula material obligada a moverse sobre un cilindro bajo la acción de tales fuerzas.

Análogamente al movimiento de una partícula material restringida a moverse sobre una superficie bidimensional, el movimiento del punto representativo en el espacio de configuración debería describirse de manera muy simple proyectando sus *ecuaciones de movimiento* sobre direcciones tangenciales a la superficie en donde está confinado. Ampliando la analogía con la partícula que se mueve sobre una superficie bidimensional en

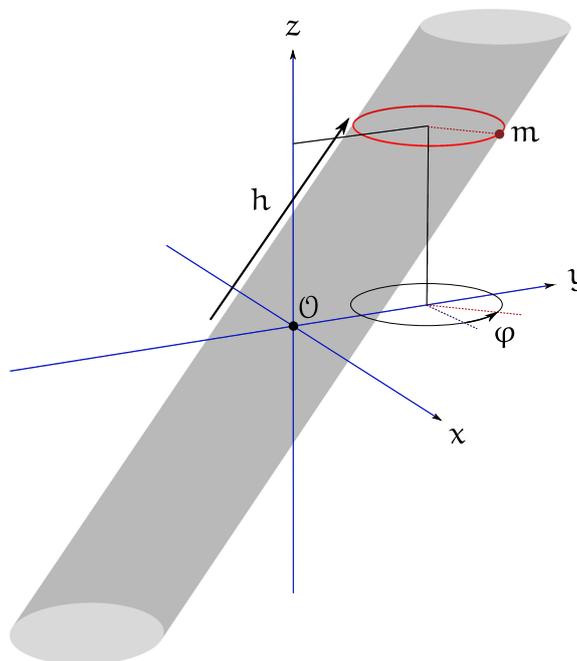
el espacio real de 3 dimensiones, esta proyección de las ecuaciones de movimiento tiene como efecto eliminar del problema las *fuerzas de vínculo*, siempre y cuando estas fuerzas de vínculo resulten normales a la superficie en donde se mueve la partícula. Notar que hemos remarcado las expresiones *ecuaciones de movimiento* y *fuerzas de vínculo* al hablar del movimiento del punto representativo en el espacio de configuración. Claro está que ni las ecuaciones de movimiento del punto representativo se leen directamente de las ecuaciones de Newton de las dos partículas ni las fuerzas de vínculo en ese espacio abstracto tienen una lectura directa en términos de las fuerzas de vínculo sobre las dos partículas del espacio real. Por empezar, en el espacio real tenemos dos partículas, y en el espacio abstracto tenemos el movimiento de un único punto.

## Una digresión

Debido a que el problema de una partícula sobre una superficie es fundamental para la analogía que buscamos establecer, veremos un tal ejemplo. Supongan que una partícula de masa  $m$ , cuya posición es descripta, en principio, por coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  se mueve en la superficie del cilindro definido por

$$x^2 + (y - z)^2 = l^2. \quad (47)$$

Es el mismo cilindro de las figuras anteriores, con la única diferencia de que ahora, por estar hablando del movimiento de una partícula en el espacio real, lo estamos pensando en el espacio ordinario con coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$ .



Supongamos que sobre la partícula actúan ciertas fuerzas aplicadas,  $\mathbf{F}^{(ap)}$ , y la fuerza de reacción de la superficie,  $\mathbf{F}^{(v)}$ . Asumiremos que no hay rozamiento, y que por lo tanto  $\mathbf{F}^{(v)}$  está en la dirección normal. El primer paso es escribir la ecuación de Newton.

Si la partícula está en el punto caracterizado por las coordenadas  $z$  y  $\varphi$ , su posición es

$$\mathbf{r}(z, \varphi) = l \hat{\rho}(\varphi) + z\hat{y} + z\hat{z}. \quad (48)$$

Introduciendo el versor

$$\hat{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{y} + \hat{z}) \quad (49)$$

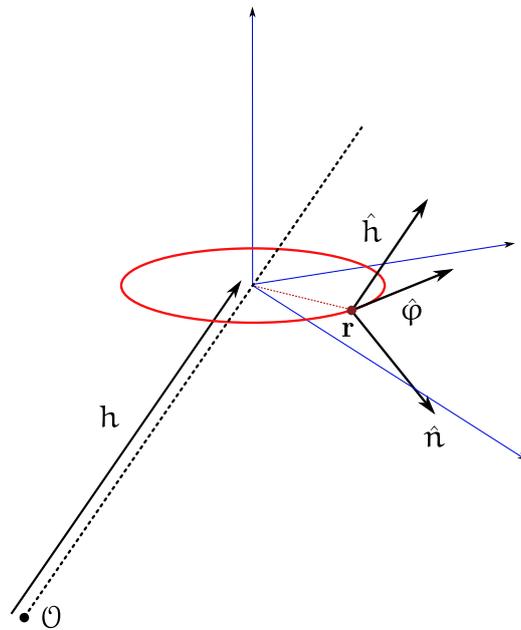
y la coordenada que mide la *altura*  $h = \sqrt{2}z$  en la dirección de  $\hat{h}$ , es

$$\mathbf{r}(h, \varphi) = l \hat{\rho}(\varphi) + h \hat{h}. \quad (50)$$

La velocidad y la aceleración de la partícula son

$$\dot{\mathbf{r}} = l\dot{\varphi} \hat{\varphi}(\varphi) + \dot{h} \hat{h}, \quad (51)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = l[\ddot{\varphi} \hat{\varphi}(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \hat{\rho}(\varphi)] + \ddot{h} \hat{h}. \quad (52)$$



La ecuación de movimiento es una ecuación vectorial, de modo que necesitamos escribirla proyectándola sobre tres direcciones independientes, aunque no necesariamente ortogonales. Cuando se trata de una partícula moviéndose sobre una superficie, las direcciones naturales son la normal a la superficie,  $\hat{n}(\mathbf{r})$ , y un par cualquiera de vectores tangentes. En el caso del cilindro una elección posible de los vectores tangentes es tomar el propio versor  $\hat{h}$ , que no depende de  $\mathbf{r}$ , y el versor  $\hat{\varphi}(\varphi)$ . Notar que esta base **no es ortogonal**,

$$\hat{h} \cdot \hat{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y} \cdot \hat{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi, \quad (53)$$

y notar, especialmente, que  $\dot{\mathbf{r}}$  no tiene componentes en la dirección normal, porque de otro modo la partícula abandonaría la superficie.

Ustedes deben verificar como ejercicio que

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}}(\varphi) = \frac{\hat{\rho}(\varphi) - \sin \varphi \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi}}. \quad (54)$$

Proyectando entonces la ecuación de Newton sobre cada una de las direcciones  $\hat{\mathbf{n}}$ ,  $\hat{\mathbf{h}}$  y  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  asociadas al punto en el que se encuentra la partícula, resulta:

$$m \ddot{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -ml\dot{\varphi}^2 \hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{n}} = [\mathbf{F}^{(\text{ap})} + \mathbf{F}^{(\text{v})}] \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (55)$$

$$m \ddot{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{h}} = m\ddot{h} + \frac{ml}{\sqrt{2}}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = [\mathbf{F}^{(\text{ap})} + \mathbf{F}^{(\text{v})}] \cdot \hat{\mathbf{h}}, \quad (56)$$

$$m \ddot{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = ml\ddot{\varphi} + \frac{m\ddot{h}}{\sqrt{2}} \cos \varphi = [\mathbf{F}^{(\text{ap})} + \mathbf{F}^{(\text{v})}] \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (57)$$

Por hipótesis, la reacción de la superficie está en la dirección normal,  $\mathbf{F}^{(\text{v})} = F^{(\text{v})}\hat{\mathbf{n}}$ . Por lo tanto, en las dos últimas ecuaciones esta fuerza se cancela, y obtenemos las dos ecuaciones de movimiento necesarias para calcular  $h(t)$  y  $\varphi(t)$ ,

$$m\ddot{h} + \frac{ml}{\sqrt{2}}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = \mathbf{F}^{(\text{ap})} \cdot \hat{\mathbf{h}}, \quad (58)$$

$$ml\ddot{\varphi} + \frac{m\ddot{h}}{\sqrt{2}} \cos \varphi = \mathbf{F}^{(\text{ap})} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (59)$$

Notar que las ecs. (58) y (59) son formalmente idénticas a las ecuaciones de movimiento del problema de las dos partículas, ecs. (34) y (35), que copiamos aquí abajo:

$$(m_1 + m_2)\ddot{y}_1 + m_2 l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 0. \quad [34]$$

$$m_2 l\ddot{\varphi} + m_2 \ddot{y}_1 \cos \varphi = -m_2 g \sin \varphi, \quad [35]$$

Y al igual que en el problema de las dos partículas, la fuerza de vínculo ha desaparecido de las ecuaciones de movimiento. Ni siquiera nos hemos visto en la necesidad de despejarla de una ecuación y sustituirla en otra, etc., etc. Mediante el simple expediente de proyectar la ecuación de Newton sobre direcciones especialmente elegidas, la fuerza de reacción ha quedado al margen de las ecuaciones de movimiento. Una vez resueltas estas ecuaciones, la fuerza de reacción se obtiene a partir de la ec. (55),

$$\mathbf{F}^{(\text{v})} = -\left[ml\dot{\varphi}^2 \hat{\rho} + \mathbf{F}^{(\text{ap})}\right] \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (60)$$

Es esta estrategia la que uno querría generalizar a un problema con un número arbitrario de partículas sujetas a ciertos vínculos, estudiando el movimiento del punto representativo en el espacio de configuración como si fuera el movimiento de una partícula sometida a determinadas fuerzas y vínculos.

## Volviendo al problema original

De manera que, aunque la idea geométrica de representar el problema de las dos partículas mediante una sola partícula moviéndose sobre un cilindro sea muy sencilla de aceptar, su puesta en práctica requiere hacer una traducción cuidadosa entre las fuerzas y movimientos en el espacio real y las fuerzas y movimientos en el espacio de configuración. De eso sólo daremos aquí una idea informal. Pero podemos adelantar que, bajo ciertas circunstancias, la traducción buscada está contenida íntegramente en el principio de d'Alembert, enunciado por la ec. (45).

La primera conexión que queremos establecer es la trivialización o cancelación de las fuerzas de vínculo en el problema original y en el problema equivalente para el movimiento del punto representativo sobre una superficie:

- (a) Sabemos que las ecuaciones de movimiento de una partícula material confinada sobre una superficie bidimensional se pueden encontrar fácilmente proyectando la ecuación de Newton sobre direcciones tangentes a la superficie, con el siguiente e importante reparo: la fuerza de reacción de la superficie debe estar en la dirección normal,

$$\mathbf{F}^{(v)} = F^{(v)} \hat{\mathbf{n}}. \quad (61)$$

Esta condición trivializa la ecuación de movimiento en la dirección normal y deja dos ecuaciones independientes, en donde la reacción de la superficie no interviene. La condición de que la reacción de la superficie sea normal puede pensarse como la anulación de la fuerza de rozamiento.

- (b) Por otro lado, hemos visto en el problema de las dos partículas que las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de la ec. (2) prescindían de las fuerzas de vínculo debido a que se producía la siguiente cancelación:

$$\mathbf{F}_1^{(v)} \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2^{(v)} \cdot \delta \mathbf{r}_2 = 0. \quad [41]$$

Cuando la partícula material del primer ejemplo se reemplaza por el punto representativo en el espacio de configuración, es natural pensar que (a) y (b) expresan lo mismo desde dos perspectivas diferentes. La dinámica del punto representativo en el espacio de configuración es equivalente a la dinámica de una partícula material confinada a moverse sobre una superficie sin rozamiento debido a que, en la dinámica original de las dos partículas, se produce la cancelación expresada por la ec. (41).

Aceptado eso, no es tan difícil admitir que las dos ecuaciones independientes (una para cada variación de las coordenadas  $y_1$  y  $\varphi$ ) contenidas en la expresión

$$\left[ m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{F}_1^{(ap)} \right] \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \left[ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{F}_2^{(ap)} \right] \cdot \delta \mathbf{r}_2 = 0 \quad (62)$$

son equivalentes a las ecuaciones de movimiento del punto representativo en el espacio de configuración sobre la superficie a la que ha quedado reducido su movimiento, que a su vez puede pensarse como el movimiento de una sola partícula sometida a ciertas

fuerzas abstractas que sólo dependen de las fuerzas aplicadas en el problema original. Esto completa nuestra analogía.

## Lo que sigue

Una de las maneras sistemáticas de hacer la traducción entre el movimiento en el espacio real y el movimiento del punto representativo en el espacio de configuración (menos trabajosa que el principio de d'Alembert aunque no tan general) es la que veremos al estudiar el formalismo de Lagrange.

## BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

José, J. y Saletan E., *Classical Dynamics*, sección 2.1.

Lanczos, C., *The Variational Principles of Mechanics*, cap. 4. (Especialmente recomendado).