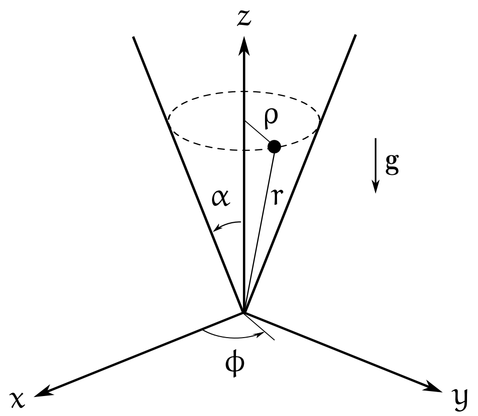
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2017 (B)

El problema del cono considerado como un problema de fuerzas centrales.*

En la Guía 2 aparece este problema:

7. Bajo la acción de la gravedad, una partícula de masa m se desliza sin rozamiento sobre una superficie cónica definida por $\theta = \alpha$, donde θ es el ángulo polar de las coordenadas esféricas, como muestra la figura.



a) Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula utilizando como coordenadas generalizadas el ángulo ϕ y el radio r de las coordenadas esféricas habituales.

b) Halle el r máximo y el r mínimo para el caso en que $\alpha = 30°$ y las condiciones iniciales sean $r(0) = a$, $\dot{r}(0) = 0$, $\dot{\phi}(0)^2 = 4\sqrt{3}g/a$.

c) Halle el potencial efectivo unidimensional equivalente. Muestre que las órbitas circulares son posibles y halle la velocidad de la partícula en tales órbitas.

d) Suponiendo que la partícula está en movimiento circular, halle la constante del oscilador y el período de oscilación para pequeñas perturbaciones alrededor de este movimiento. Compare el período de las oscilaciones con el período de revolución y describa cualitativamente la órbita de la partícula.

Vamos a transformarlo en un problema equivalente de fuerzas centrales. Eligiendo como coordenadas generalizadas el radio r y el ángulo ϕ de esféricas, el lagrangiano es:

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\alpha\, \dot{\phi}^2\right) - mg\cos\alpha\, r. \tag{1}$$

Las ecuaciones de movimiento se deducen fácilmente:

$$\ddot{r} - r\sin^2\alpha\, \dot{\phi}^2 + g\cos\alpha = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\right) = 0. \tag{3}$$

Debido a que $\mathcal{L}$ no depende explícitamente ni del tiempo ni de la variable ϕ, se conservan la función h y la componente del momento angular en la dirección z. Además, como

*Libro de quejas a su disposición: zanellaj@df.uba.ar el lagrangiano es cuadrático en las velocidades, h es la energía total $\mathcal{E} = T + U$:

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\,\dot{\phi}^2\right) + mg\cos\alpha\, r = \mathcal{E}, \tag{4}$$

$$m\sin^2\alpha\, r^2\dot{\phi} = L_z. \tag{5}$$

Lo más sencillo es combinar estas dos ecuaciones para producir un problema unidimensional equivalente en la coordenada radial. Despejando $\dot{\phi}$ de la segunda ecuación y reemplazando en la primera, se obtiene:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2m\sin^2\alpha\, r^2} + mg\cos\alpha\, r = \mathcal{E}. \tag{6}$$

Definiendo

$$\ell = \frac{L_z}{m\sin\alpha}, \qquad k = g\cos\alpha,$$

$$\epsilon = \frac{\mathcal{E}}{m}, \qquad \psi = \phi\sin\alpha, \tag{7}$$

el par de ecuaciones de conservación se escribe como

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2r^2} + kr = \epsilon, \tag{8}$$

$$r^2\dot{\psi} = \ell. \tag{9}$$

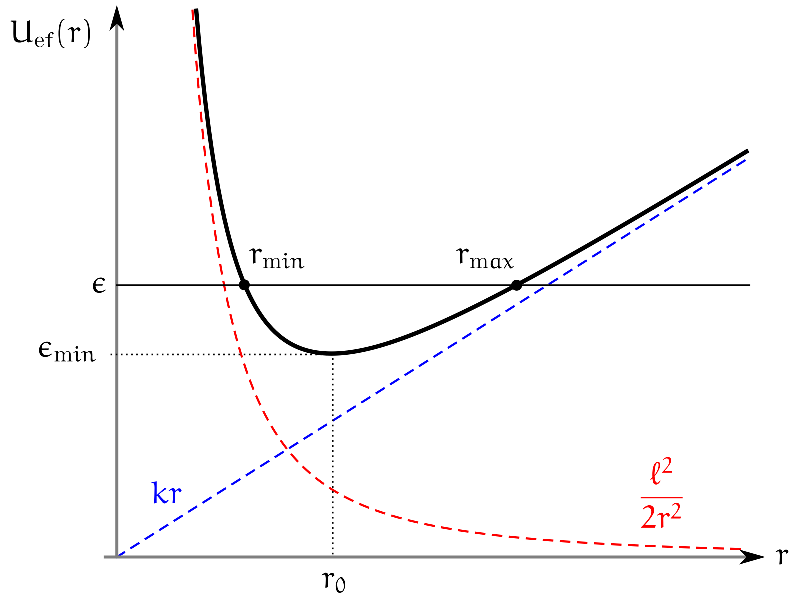
Estas son las ecuaciones de una partícula de masa unidad en un potencial central $V(r) = kr$ y con un momento angular ℓ. La única diferencia es que el ángulo ϕ se debe reemplazar por una nueva variable ψ. Si se conoce la ecuación de la órbita $r(\psi)$, entonces bastará con reemplazar ψ por $\phi\sin\alpha$ para escribir la ecuación de la órbita en las variables r y ϕ.

El potencial efectivo de este problema de fuerzas centrales es

$$U_{\text{ef}}(r) = \frac{\ell^2}{2r^2} + kr, \tag{10}$$

y tiene la forma mostrada en la figura de la página siguiente. Vemos que, para $\ell \neq 0$, todas las órbitas son acotadas, con $\epsilon \geqslant \epsilon_{\text{min}}$. El valor mínimo de la energía coincide con el valor mínimo del potencial efectivo, que ocurre cuando

$$U'_{\text{ef}}(r_0) = -\frac{\ell^2}{r_0^3} + k = 0. \tag{11}$$



Esto da

$$r_0 = \left(\frac{\ell^2}{k}\right)^{1/3}, \tag{12}$$

$$\epsilon_{min} = r_0\left(\frac{\ell^2}{2r_0^3} + k\right) = \frac{3}{2}(k\ell)^{2/3}. \tag{13}$$

Este valor de r_0 está asociado a una órbita circular estable. Debido a que $\dot{\phi}$ es función de r, $\dot{\phi}$ también es constante. El período del movimiento es entonces

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi \sin\alpha\, r_0^2}{\ell} = \frac{2\pi \sin\alpha\, \ell^{1/3}}{k^{2/3}} = \frac{3\pi \sin\alpha\, \ell}{\epsilon_{min}}. \tag{14}$$

Los límites del movimiento se encuentran a partir de la condición $\dot{r} = 0$, que equivale encontrar los valores de r en los que la energía total es igual al valor del potencial efectivo:

$$\frac{\ell^2}{2r^2} + kr = \epsilon, \tag{15}$$

que es una ecuación cúbica en r,

$$r^3 - \frac{\epsilon}{k}r^2 + \frac{\ell^2}{2k} = 0. \tag{16}$$

El gráfico del potencial efectivo hace evidente que si $\epsilon > \epsilon_{min}$ esta ecuación siempre tiene dos soluciones, r_{min} y r_{max}. Si $\epsilon = \epsilon_{min}$, habrá una sola solución, que corresponde a la órbita circular de radio r_0.

En general, si las condiciones iniciales no se dan de una manera especial, las raíces de las ecuación cúbica serán un poco intratables para escribirlas en el papel. Pero si la condición inicial se da en la forma $r(0) = a$, $\dot{r}(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, ya sabemos que a debe ser uno de los radios límite del movimiento, puesto que $\dot{r}(0) = 0$ para ese valor de r. Conociendo una de las raíces de la ecuación cúbica es fácil determinar las otras dos. Si a es una de las raíces, entonces

$$\epsilon = \frac{\ell^2}{2a^2} + ka, \tag{17}$$

y la cúbica puede reescribirse eliminando ϵ, con lo que resulta

$$r^3 + \frac{\ell^2}{2ka^2}(a^2 - r^2) - r^2 a = \left[r^2 - \frac{\ell^2}{2ka^2}(r+a)\right](r-a) = 0. \tag{18}$$

Factorizada de esta forma, vemos que las otras dos raíces son

$$r_\pm = \frac{\ell^2}{4ka^2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{8a^3k}{\ell^2}}\,\right]. \tag{19}$$

En términos del radio r_0 de la órbita circular de la ec. (12), queda

$$r_\pm = \frac{1}{4}a\left(\frac{r_0}{a}\right)^3\left[1 \pm \sqrt{1 + 8\left(\frac{a}{r_0}\right)^3}\,\right]. \tag{20}$$

Evidentemente, de las dos soluciones, sólo la que tiene el signo positivo frente a la raíz es la que corresponde al otro punto de retorno,

$$b = \frac{1}{4}a\left(\frac{r_0}{a}\right)^3\left[1 + \sqrt{1 + 8\left(\frac{a}{r_0}\right)^3}\,\right]. \tag{21}$$

Es inmediato verificar que para $a = r_0$ el otro punto de retorno es también r_0, como no puede ser de otra manera, ya que la órbita debe ser circular.

La solución general de las ecuaciones de movimiento puede escribirse en términos de funciones elípticas. De modo que la única solución sencilla que tenemos es la de la órbita circular. Una de las cuestiones características de este tipo de problemas es analizar la órbitas que resultan para valores de ϵ y ℓ próximos a los que determinan la órbita circular (12). En otras palabras, se trata de buscar soluciones aproximadas de la forma

$$r(t) = r_0 + \delta r(t), \tag{22}$$

donde $|\delta r(t)| \ll r_0$. Hay varios caminos. Uno de ellos consiste en derivar respecto del tiempo la ecuación (8) de la energía para obtener la ecuación de movimiento para r,

$$\ddot{r} - \frac{\ell^2}{r^3} + k = 0, \tag{23}$$

sustituir la forma (22) y conservar sólo términos lineales en la perturbación. Notar que para un potencial general $V(r)$ tendríamos

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[r_0 + \delta r\right] + U'_{\text{ef}}(r_0 + \delta r) = \frac{d^2\delta r}{dt^2} + U'_{\text{ef}}(r_0 + \delta r) = 0. \tag{24}$$

Por definición, $U'_{ef}(r_0) = 0$, lo que implica que su expansión en potencias de δr alrededor de r_0 tiene esta forma

$$\begin{aligned} U'_{ef}(r_0 + \delta r) &= U'_{ef}(r_0) + U''_{ef}(r_0)\delta r + \dots \\ &= U''_{ef}(r_0)\delta r + \dots \end{aligned} \tag{25}$$

Así, conservando únicamente términos lineales en δr, obtenemos

$$\frac{d^2\delta r}{dt^2} + U''_{ef}(r_0)\delta r = 0, \tag{26}$$

que es la ecuación de un oscilador armónico. Para el problema del cono es

$$U_{ef} = \frac{\ell^2}{2r^2} + kr, \tag{27}$$

$$U'_{ef} = -\frac{\ell^2}{r^3} + k, \tag{28}$$

$$U''_{ef} = \frac{3\ell^2}{r^4}, \tag{29}$$

y la ecuación de movimiento se lee como

$$\ddot{\delta r} + \frac{3\ell^2}{r_0^4}\delta r = 0. \tag{30}$$

En la práctica, en lugar de calcular la derivada segunda del potencial efectivo, suele ser más sencillo operar directamente con la ecuación de movimiento. Por ejemplo, a partir de la ec. (23) escribimos

$$\ddot{\delta r} - \frac{\ell^2}{(r_0 + \delta r)^3} + k = 0, \tag{31}$$

$$\ddot{\delta r} - \frac{\ell^2}{r_0^3}\left(1 + \frac{\delta r}{r_0}\right)^{-3} + k = 0, \tag{32}$$

$$\ddot{\delta r} - \frac{\ell^2}{r_0^3}\left(1 - 3\frac{\delta r}{r_0} + \dots\right) + k = 0, \tag{33}$$

$$\ddot{\delta r} + \frac{3\ell^2}{r_0^4}\delta r - \left(\frac{\ell^2}{r_0^3} - k\right) + \dots = 0. \tag{34}$$

Ahora bien, los términos de orden cero en δr se cancelan, porque reproducen la ecuación que determina el radio r_0. Luego, a primer orden en δr resulta, como antes, la ecuación del oscilador

$$\ddot{\delta r} + \frac{3\ell^2}{r_0^4}\delta r = 0. \tag{35}$$

La frecuencia del movimiento radial es entonces

$$\omega_r = \frac{\sqrt{3}\ell}{r_0^2}. \tag{36}$$

Por otro lado, la frecuencia del movimiento angular a orden cero en δr sigue siendo

$$\omega_\phi = \frac{\ell}{r_0^2 \sin\alpha}. \tag{37}$$

La relación entre los períodos de cada movimiento es así

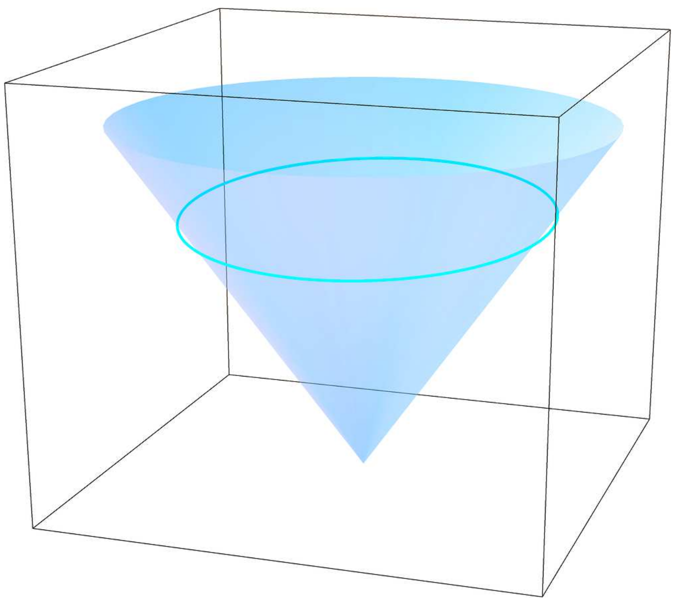
$$\frac{\tau_\phi}{\tau_r} = \sqrt{3}\sin\alpha. \tag{38}$$

Para que la órbita perturbada sea cerrada los períodos deben ser conmensurables. Es decir, si queremos que la órbita se cierre al cabo (y no antes) de q revoluciones y de p oscilaciones radiales debe ocurrir que

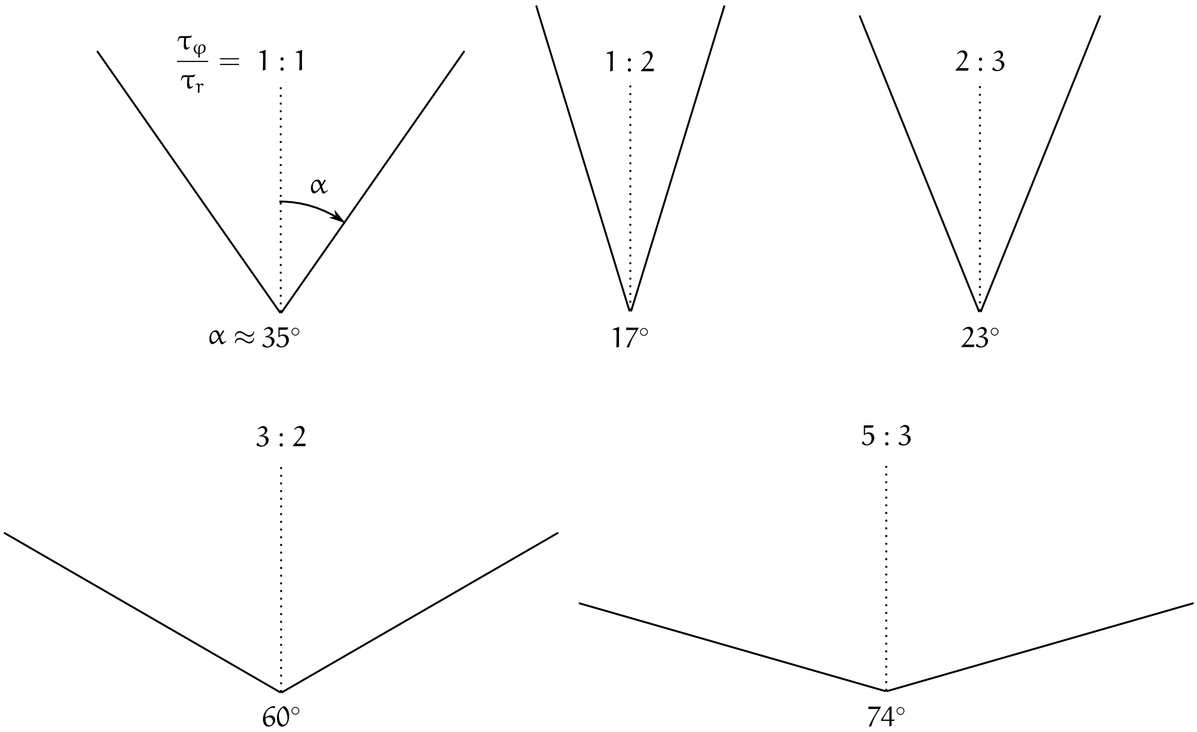
$$q\tau_\phi = p\tau_r \Rightarrow \frac{\tau_\phi}{\tau_r} = \sqrt{3}\sin\alpha = \frac{p}{q}, \tag{39}$$

con p y q enteros y sin divisores comunes.

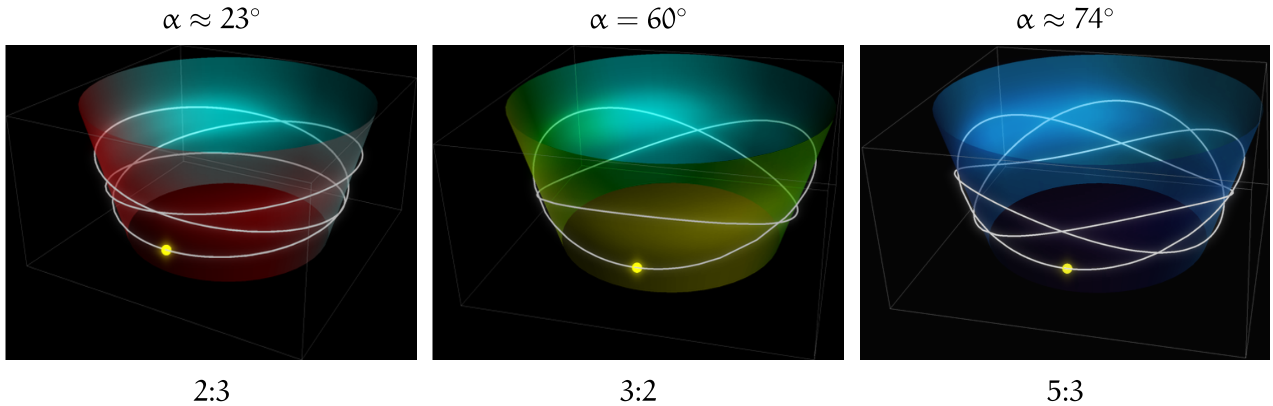
Vemos que la naturaleza de las órbitas perturbadas es una propiedad intrínseca del cono, ya que depende de que $\sqrt{3}\sin\alpha$ sea un número racional o no. Como cualquier número irracional puede aproximarse arbitrariamente por un número racional, en la práctica interesan sólo los valores de α que den lugar a cocientes p/q con p y q pequeños. En particular, cuando $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$, es $\alpha \approx 35°$, y la relación entre los dos períodos es 1:1. La órbita tiene la forma de una elipse ligeramente excéntrica, como muestra la figura.



Otras relaciones posibles para p y q pequeños son 1:2, 2:3, 3:2, 5:3, etc. Notar que el caso 2:1 es imposible, porque significaría $\sin\alpha = 2/\sqrt{3} > 1$. Notar asimismo que relaciones $p : q$ demasiado altas o bajas requieren conos o muy obtusos o muy agudos, respectivamente.



En la figura de abajo se muestran las órbitas para los últimos tres conos de la figura anterior.



Notar que la relación de aspecto horizontal-vertical está alterada para hacer visible la órbita, que tiene lugar en una franja estrecha de valores de z, sobre todo en el último caso. Para hacer estas figuras la perturbación se introdujo a través de ℓ, usando un valor un 10 % más alto del correspondiente a la órbita circular y tomando como condición inicial $r(0) = r_0$ y $\dot{r}(0) = 0$. La relación entre los radios máximos y mínimos es $\approx 1{,}13$ en todos los casos.