Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2017 (B)

La precesión de Mercurio.*

Se propone un problema y dos métodos de solución. Se trata de encontrar la velocidad de precesión para un problema de fuerzas centrales descripto por el siguiente par de ecuaciones de conservación:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{GM\ell^2}{c^2r^3} = \mathcal{E}, \tag{1}$$

$$r^2\dot{\phi} = \ell. \tag{2}$$

Este sistema describe el movimiento de un cuerpo de masa unidad que orbita alrededor de un cuerpo de masa M cuando se tienen en cuenta correcciones relativistas. Aquí, c es la velocidad de la luz. Es fácil verificar que el término adicional es de orden v^2/c^2, donde v es la velocidad típica en el problema de Kepler sin las correcciones relativistas:

$$\frac{GM\ell^2}{c^2r^3} = \left(\frac{GM}{r}\right)\left(\frac{\ell^2}{r^2c^2}\right) \sim \left(\frac{GM}{r}\right)\left(\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right) \sim \frac{GM}{r}\frac{v^2}{c^2}. \tag{3}$$

Las órbitas no son fáciles de analizar a menos que se suponga que se apartan poco de la circularidad. El objetivo es demostrar que tales órbitas son elipses con cierta velocidad de precesión.

Primer método

El camino más sencillo consiste en escribir la ecuación de la órbita para la variable $u(\phi)$, donde $u = 1/r$. En general, para un problema de la forma

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) = \mathcal{E}, \tag{4}$$

$$r^2\dot{\phi} = \ell, \tag{5}$$

en la ecuación de la energía primero se reemplaza $\dot{r}$ por $\dot{\phi}\,dr/d\phi$, con lo que resulta

$$\frac{\ell^2}{2r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + V(r) = \mathcal{E}. \tag{6}$$

Luego se escribe $r = 1/u$, de modo que $dr/d\phi = -(1/u^2)du/d\phi$, y entonces

$$\frac{1}{2}\ell^2\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + V(1/u) = \mathcal{E}. \tag{7}$$

Por último, derivando respecto de ϕ y cancelando factores comunes, queda la ecuación diferencial de la órbita:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} - \frac{1}{\ell^2u^2}V'(1/u) = 0. \tag{8}$$

*Libro de quejas a su disposición: zanellaj@df.uba.ar

Por ejemplo, para el problema de Kepler es $V = \ell^2/(2r^2) - GM/r$, y por lo tanto

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{GM}{\ell^2} = 0. \tag{9}$$

En el problema que queremos resolver ahora, $V(r)$ tiene además la corrección relativista, lo que agrega un nuevo término a la ecuación anterior,

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{GM}{\ell^2} - \frac{3GM}{c^2}u^2 = 0. \tag{10}$$

Lo que tienen que hacer es proponer una solución de la forma $u_0 + \delta u$, donde u_0 es la solución para la órbita circular en el problema sin la corrección relativista:

$$u_0 = \frac{GM}{\ell^2}. \tag{11}$$

Reemplacen en la ecuación diferencial de la órbita y conserven hasta términos lineales en δu. Resuelvan la ecuación lineal y lean de la solución la frecuencia del movimiento radial como función de ϕ. De aquí pueden calcular en cuánto atrasa o adelanta el perihelio por cada revolución angular,

$$\Omega \equiv \frac{\Delta\phi}{T_0}. \tag{12}$$

Segundo método

Es más complicado, porque en lugar de resolver la ecuación de la órbita $r(\phi)$ se busca la ecuación de la trayectoria $r(t)$, conservando términos de orden no mayor a $1/c^2$. Para eso:

a) Derivar la ec. (1) respecto del tiempo para obtener una ecuación diferencial de segundo orden para $r(t)$.

b) Encontrar el radio r_0 de la órbita circular estable hasta primer orden en $1/c^2$. (Van a ver que hay dos soluciones para órbitas circulares: una es inestable y tiene un radio próximo a cero; la otra es estable y su radio es próximo al radio de la órbita circular del problema de Kepler. Quédense con esta última).

c) Calcular el período de revolución para la órbita circular estable hasta primer orden en $1/c^2$. (Esto sale de la conservación del momento angular, asumiendo que conocen ℓ).

d) Proponer una solución de la forma $r = r_0 + \delta r$, y escribir la ecuación de movimiento para δr a primer orden en δr. (Esta va a ser la ecuación de un oscilador armónico.)

e) Calcular la frecuencia del movimiento radial hasta orden $1/c^2$.

f) A partir de la diferencia entre la frecuencia de revolución y la frecuencia del movimiento radial, surge cuánto se adelanta un movimiento al otro, y de aquí la velocidad de precesión.

El resultado debe ser idéntico al del primer método.

Finalmente: Mercurio.

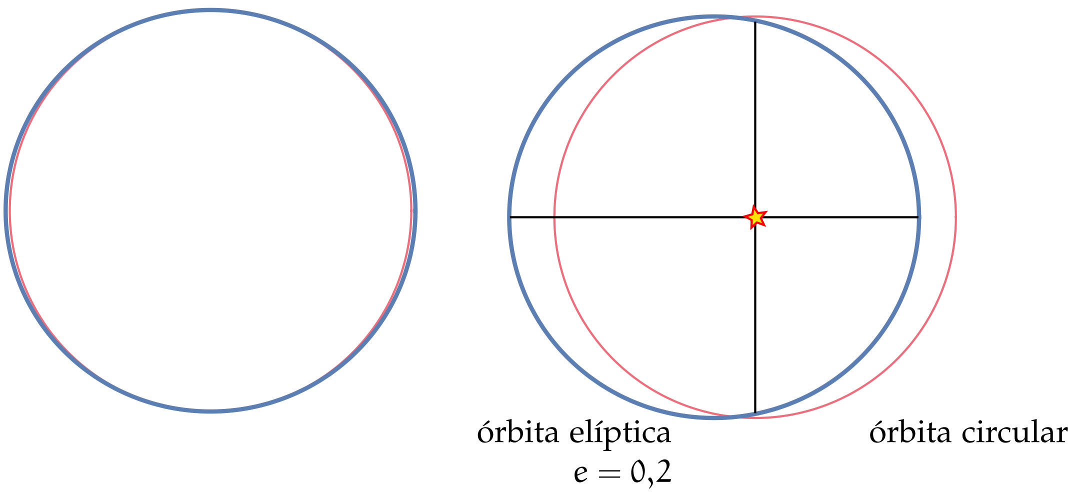
Usando las fórmulas que obtuvieron antes, calculen en cuánto atrasa o adelanta en un siglo el perihelio de Mercurio como consecuencia de las correcciones relativistas. Usen los siguientes datos: el período de revolución es de 88 días y la velocidad media de 47 km/s. El resultado debe ser muy próximo a 40 segundos de arco por siglo. Un segundo de arco es un 1 grado dividido 60 dividido 60.

Comentario al margen: la órbita de Mercurio tiene en realidad una excentricidad no despreciable, $e \approx 0,2$, que se traduce en una relación entre los semiejes $a/b = (1-e^2)^{-1/2} \approx 1,02$. Sobre el papel, es difícil distinguir su dibujo del de una circunferencia. Sin embargo, de una manera más sutil, la órbita elíptica está lejos de confundirse con la órbita circular. La diferencia no se halla en la comparación de los semiejes, sino en las distancias de máximo y mínimo acercamiento al centro de fuerza. La relación entre estas dos distancias es

$$\frac{r_{max}}{r_{min}} = \frac{1+e}{1-e} \approx 1,5 \tag{13}$$

que no es una cantidad que pase desapercibida. Sería muy difícil de otro modo observar tal cosa como la precesión del perihelio de Mercurio.

La figura de abajo muestra a la izquierda, centradas en el mismo punto, una circunferencia de radio 1 y la elipse de semieje mayor 1 y excentricidad $e = 0,2$. Pero en el problema de Kepler, el centro de la órbita circular es el foco de la órbita elíptica, como en la figura de la derecha.



La diferencia entre las dos órbitas se vuelve entonces apreciable. Lo mismo ocurre con la precesión de la órbita elíptica. La última figura muestra tres instancias. En el caso de Mercurio, cada una de estas órbitas momentáneas está separada de la otra por unos 8000 años. Los efectos relativistas dan cuenta sólo de un $0,05\,\%$ precesión observada.