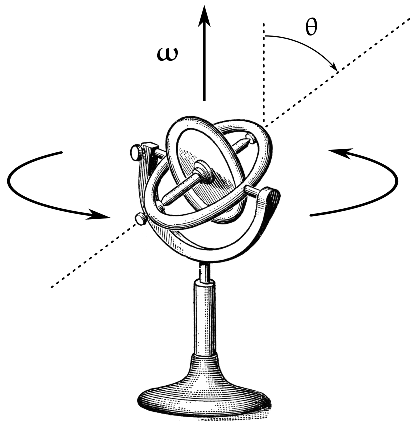
Mecánica Clásica (B)[*] – 2do. cuatrimestre de 2017 AD

Primer parcial (con soluciones) – 12/10

■ **Problema 1**. El marco exterior de un giróscopo rota con velocidad angular <u>constante</u> $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{z}$, como muestra la figura, donde $\omega > 0$. Los momentos de inercia principales del giróscopo con respecto a su centro de masa son $I_1 = I_2$ e I_3, todos mayores que cero. Cuando el giróscopo está en reposo, no actúan torques externos respecto a su centro de masa.



a) En términos de los ángulos de Euler que sean necesarios, escriba el lagrangiano y las ecuaciones de Euler-Lagrange. ¿Hay coordenadas cíclicas? En tal caso, ¿cuáles son las funciones conservadas asociadas?

b) ¿Se conserva la función hamiltoniana h? ¿Se conserva la energía? Justificar.

c) A partir de las cantidades conservadas defina un problema unidimensional equivalente para el ángulo de Euler θ. Para fijar la notación entre todos los participantes, escriba el potencial efectivo como

$$U(\theta) = A\big(\cos^2\theta - \lambda\cos\theta\big) + \text{constante},$$

indicando los valores de las constantes A y λ. Recuerde: $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

d) Muestre que, dependiendo sólo del valor de λ, el potencial efectivo toma cualitativamente aspectos diferentes (¿tiene mínimos?, ¿máximos?, etc.). Grafique las alternativas posibles y diga a qué rango de valores de λ corresponde cada una. **Importante**: asumir que inicialmente es $\omega_3 > 0$.

e) En cada uno de los casos identificados en el ítem anterior, diga cuáles son los puntos de equilibrio estable e inestable para el problema unidimensional en la variable θ.

f) Suponga que el ángulo θ corresponde a alguno de los puntos de equilibrio del problema unidimensional. Calcule el torque que es necesario aplicar externamente respecto del centro de masa para mantener constante la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

[*] La **B** es de barato.

■ **Solución.** La rotación del marco exterior fija el valor de la dirección de la línea de nodos en función del tiempo. Esta dirección será $\varphi(t) = \varphi(0) + \omega t$. Sin pérdida de generalidad podemos tomar $\varphi(0) = 0$ y escribir

$$\varphi(t) = \omega t. \tag{1}$$

Fijado este ángulo de Euler, quedan únicamente dos grados de libertad, representados por las coordenadas θ y ψ. El lagrangiano es igual a la energía cinética. Debido a igualdad entre los momentos principales de inercia I_1 e I_2, y teniendo en cuenta que $\dot{\varphi} = \omega$, resulta

$$L\big(\theta, \psi, \dot{\theta}, \dot{\psi}, t\big) = \frac{I_3}{2}\Big(\dot{\psi} + \omega\cos\theta\Big)^2 + \frac{I_1}{2}\Big(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta\Big), \tag{2}$$

que en realidad es una función sólo de θ, $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$,

$$L\big(\theta, \psi, \dot{\theta}, \dot{\psi}, t\big) = L\big(\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi}\big). \tag{3}$$

Las ecuación de Euler-Lagrange para θ es

$$I_1\ddot{\theta} = -\omega I_3\Big(\dot{\psi} + \omega\cos\theta\Big)\sin\theta + I_1\omega^2\sin\theta\,\cos\theta, \tag{4}$$

y para ψ,

$$I_3\frac{d}{dt}\Big(\dot{\psi} + \omega\cos\theta\Big) = 0 \tag{5}$$

Esta última ecuación da una integral primera de movimiento. debido a que ψ es variable cíclica. La velocidad angular ω_3 se conserva:

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \omega\cos\theta. \tag{6}$$

En el mismo orden de cosas, como el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, la función h se conserva, donde

$$\begin{aligned} h(\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi}) &= \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} + \dot{\psi}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} - L \\ &= \frac{I_1}{2}\Big(\dot{\theta}^2 - \omega^2\sin^2\theta\Big) + I_3\dot{\psi}\Big(\dot{\psi} + \omega\cos\theta\Big) - \frac{I_3}{2}\Big(\dot{\psi} + \omega\cos\theta\Big)^2. \end{aligned} \tag{7}$$

La función h no es la energía, puesto que la energía cinética no es una función homogénea de grado 2 de las velocidades. Es fácil ver que la conservación simultánea de h y de la energía sólo ocurre en casos triviales.

Escribiendo $\dot{\psi}$ en términos de ω_3 y de θ, la conservación de h, entendida como función de θ, $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$, es equivalente a la conservación de h entendida como función de θ y $\dot{\theta}$

$$h(\theta, \dot{\theta}) = \frac{I_1}{2}\Big(\dot{\theta}^2 - \omega^2\sin^2\theta\Big) + \frac{I_3}{2}\omega_3^2 - I_3\omega_3\omega\cos\theta. \tag{8}$$

En estos casos, conviene dejar todo escrito en términos de una sola función trigonométrica de θ. Lo más cómodo es tomar el coseno, y escribir

$$h(\theta, \dot{\theta}) = \frac{I_1}{2}\Big(\dot{\theta}^2 + \omega^2\cos^2\theta\Big) - \frac{I_1}{2}\omega^2 + \frac{I_3}{2}\omega_3^2 - I_3\omega_3\omega\cos\theta. \tag{9}$$

Los términos $-I_1\omega^2/2$ y $I_3\omega_3^2/2$ son simples constantes aditivas, de modo que podemos redefinir h como

$$h \to h(\theta,\dot\theta) = \frac{I_1}{2}\left(\dot\theta^2 + \omega^2\cos^2\theta\right) - I_3\omega_3\omega\cos\theta \tag{10}$$

$$= \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 + \frac{I_1\omega^2}{2}\left(\cos^2\theta - \frac{2I_3\omega_3}{I_1\omega}\cos\theta\right). \tag{11}$$

Aquí tenemos un problema unidimensional equivalente para θ, donde identificamos un potencial efectivo

$$U(\theta) = \frac{I_1\omega^2}{2}\left(\cos^2\theta - \frac{2I_3\omega_3}{I_1\omega}\cos\theta\right). \tag{12}$$

Debido a que $I_1\omega^2$ es mayor que cero, la forma de este potencial estará dictada únicamente por el término entre paréntesis. La única magnitud relevante es la combinación

$$\lambda = \frac{2I_3\omega_3}{I_1\omega}, \tag{13}$$

de manera que la función que hay que investigar es

$$f(\theta) = \cos^2\theta - \lambda\cos\theta. \tag{14}$$

Según el enunciado del problema ω es mayor que cero. Pero también ω_3 es inicialmente mayor que cero, propiedad que se mantendrá a través del tiempo, debido a que ω_3 es constante. Por lo tanto será $\lambda > 0$. Esto simplifica el análisis de la función f. (En el caso general, puede verse que lo que ocurre para $\lambda < 0$ es lo mismo que ocurre para $\lambda > 0$ reemplazando θ por $\pi - \theta$. Es decir, poniendo el giróscopo de cabeza).

Tenemos que ver qué tipo de función es f. Basta con analizar el intervalo $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Para empezar, $f(0) = 1 - \lambda$, que será mayor que cero cuando sea λ menor que 1. En el otro extremo del intervalo, $f(\pi) = 1 + \lambda$, siempre mayor que cero. Además $f(\pi/2) = 0$, independientemente del valor de λ.

Ahora analicemos la derivada primera de f,

$$f'(\theta) = -(2\cos\theta - \lambda)\sin\theta. \tag{15}$$

Esta expresión se anula siempre en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Además, si $\lambda < 2$, y sólo en ese caso, tendremos otro punto estacionario θ_0, tal que

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{2}\lambda. \tag{16}$$

Notar que cuando $\lambda \to 2$, θ_0 tiende a cero, fundiéndose con el punto estacionario en $\theta = 0$, y, por otro lado, a medida que λ disminuye, el punto estacionario θ_0 se mueve hacia $\pi/2$.

Para conocer la naturaleza de los puntos estacionarios, calculamos la derivada segunda de f, que es

$$f''(\theta) = -(2\cos\theta - \lambda)\cos\theta + 2\sin^2\theta. \tag{17}$$

En los extremos del intervalo tenemos

$$f''(0) = \lambda - 2, \tag{18}$$

$$f''(\pi) = -(\lambda + 2). \tag{19}$$

Así, el punto $\theta = \pi$ es siempre un máximo. En cambio, $\theta = 0$ es un mínimo para $\lambda > 2$ y un máximo para $\lambda < 2$. A su vez, en el punto θ_0 resulta

$$f''(\theta_0) = 2\sin^2\theta_0, \tag{20}$$

de modo que $f''(\theta_0)$ es siempre mayor que cero, lo que indica un mínimo.

[Justo cuando $\lambda = 2$, la derivada segunda se anula en $\theta = 0$. En ese caso es necesario derivar dos veces más. Antes de derivar conviene reescribir la Ec. (17), reduciendo el número de factores,

$$f''(\theta) = \lambda\cos\theta - 2\cos 2\theta.$$

Luego,

$$f^{(3)}(\theta) = -\lambda\sin\theta + 4\sin 2\theta,$$

$$f^{(4)}(\theta) = -\lambda\cos\theta + 8\cos 2\theta.$$

En $\theta = 0$ es

$$f^{(3)}(0) = 0,$$

$$f^{(4)}(0) = 8 - \lambda,$$

de modo que justo en $\lambda = 2$ es $f^{(4)}(0) = 6 > 0$, lo que implica que $\theta = 0$ sigue siendo un mínimo incluso para $\lambda = 2$.]

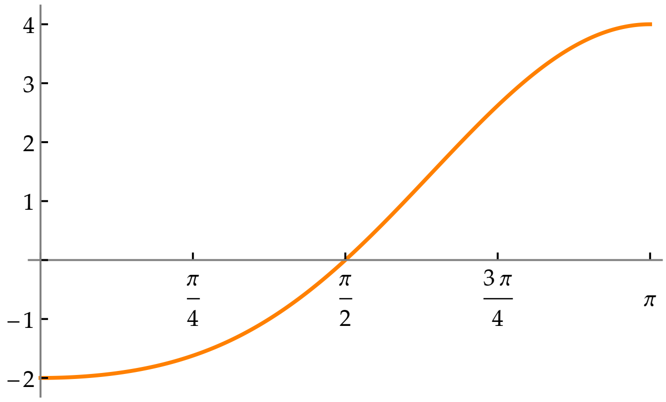
Finalmente, notemos que la función $f(\theta)$ puede tener otro cero además de $\theta = \pi/2$. Cuando $\lambda < 1$ existirá un ángulo θ_1, con $0 < \theta_1 < \pi/2$ tal que

$$\cos\theta_1 = \lambda, \tag{21}$$

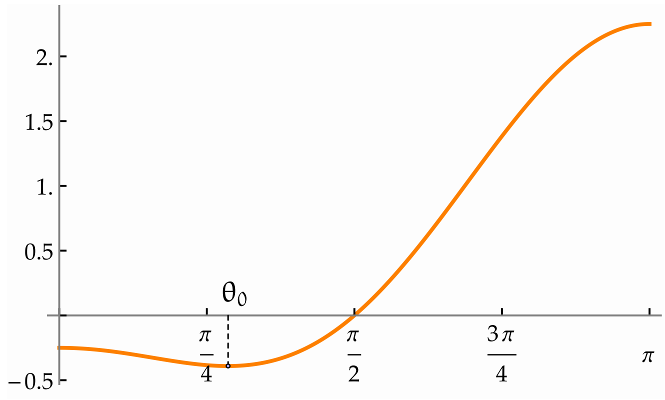
y por lo tanto $f(\theta_1) = 0$. Este resultado no es independiente de los otros. Ya vimos que si λ es menor que 1 la función f es mayor que cero en $\theta = 0$. Al mismo tiempo, puesto que λ será también menor que 2, sabemos que la función f debe tener un mínimo entre 0 y $\pi/2$. Más aún, f tiene que anularse en $\pi/2$. Ahora bien, es imposible dibujar el gráfico de una función que sea mayor que cero en $\theta = 0$, que se anule en $\theta = \pi/2$, que tenga un sólo mínimo entre 0 y $\pi/2$ y que no cruce por cero en ese intervalo.

En definitiva, las alternativas que hay que contemplar son:

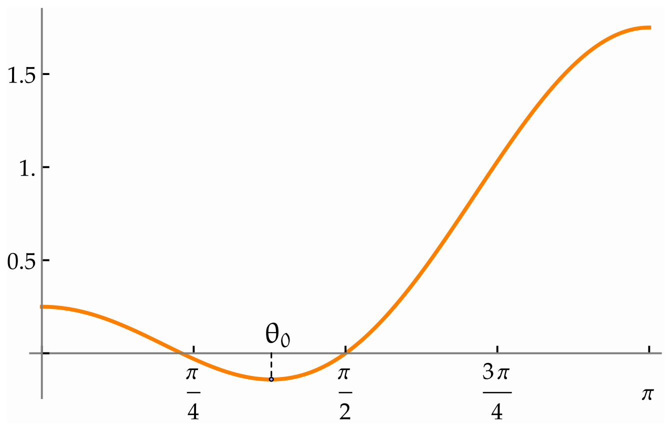
- $2 \leqslant \lambda$. Corresponde a bajas velocidades de rotación del marco, o altas velocidades de rotación ω_3. Los únicos puntos de equilibrio son $\theta = 0$ (estable) y $\theta = \pi$ (inestable), como muestra la siguiente figura, donde se ha tomado $\lambda = 3$.



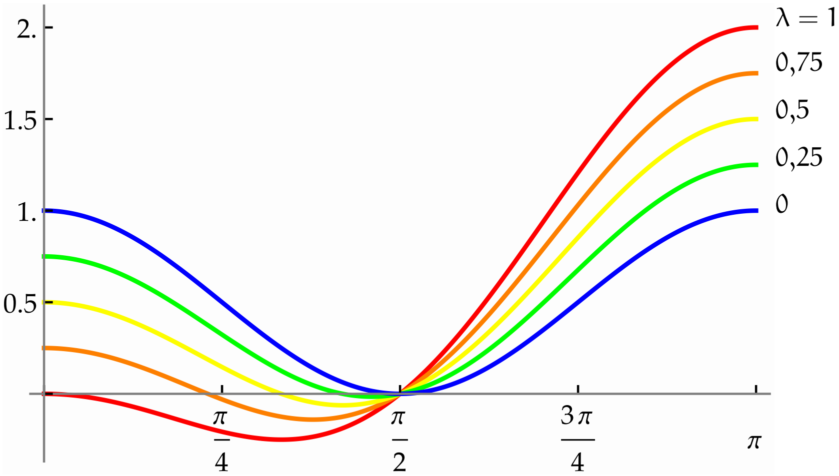
- $1 \leqslant \lambda < 2$. Corresponde a $I_3\omega_3$ de magnitud comparable a $I_1\omega$. El punto de equilibrio $\theta = 0$ se vuelve inestable y aparece el punto de equilibrio estable en θ_0. La figura de abajo es para $\lambda = 1{,}25$.



- $0 \leqslant \lambda < 1$. En este régimen domina el efecto de la rotación del marco. Cualitativamente, es igual al anterior. Los extremos del intervalo son puntos de equilibrio inestable y el punto θ_0 es estable. La figura muestra el caso $\lambda = 0{,}75$.



A medida que λ se acerca a cero, el gráfico de la función f hace el siguiente recorrido:



Notar cómo el punto de equilibrio θ_0 se desplaza hacia $\pi/2$.

Respecto al último ítem del problema. La rotación con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ puede requerir la aplicación de un torque externo $\mathbf{N}$. Eso dependerá de si varía o no el momento angular. Tomando como punto de referencia el centro de masa, es

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}. \tag{22}$$

Tenemos que calcular entonces el momento angular. Lo más sencillo es escribir $\mathbf{L}$ según la base de los ejes del cuerpo:

$$\mathbf{L} = I_1(\omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2) + I_3\omega_3\hat{e}_3 \tag{23}$$

Usando el hecho de que $\dot{\varphi} = \omega$ y que en los puntos de equilibrio para θ es $\dot{\theta} = 0$, resulta

$$\omega_1 = \omega \sin\psi \, \sin\theta, \tag{24}$$

$$\omega_2 = \omega \cos\psi \, \sin\theta. \tag{25}$$

De ω_3 ya sabemos que es constante. Además,

$$\hat{e}_1 = \cos\psi \; \hat{\rho}(\varphi) + \sin\psi \Big[\cos\theta \; \hat{\varphi}(\varphi) + \sin\theta \; \hat{z}\Big], \tag{26}$$

$$\hat{e}_2 = -\sin\psi \; \hat{\rho}(\varphi) + \cos\psi \Big[\cos\theta \; \hat{\varphi}(\varphi) + \sin\theta \; \hat{z}\Big], \tag{27}$$

$$\hat{e}_3 = -\sin\theta \; \hat{\varphi}(\varphi) + \cos\theta \; \hat{z}. \tag{28}$$

Luego,

$$\omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2 = \omega\Big[\cos\theta \; \hat{\varphi}(\varphi) + \sin\theta \; \hat{z}\Big]\sin\theta. \tag{29}$$

Entonces el momento angular es

$$\mathbf{L} = I_1\omega\Big[\cos\theta \; \hat{\varphi}(\varphi) + \sin\theta \; \hat{z}\Big]\sin\theta + I_3\omega_3\Big[-\sin\theta \; \hat{\varphi}(\varphi) + \cos\theta \; \hat{z}\Big] \tag{30}$$

Es una buena señal que no aparezca el ángulo ψ, puesto que la elección de los ejes 1 y 2 es arbitraria, debido a que los momentos principales I_1 e I_2 son iguales. A todos los efectos prácticos, en el cálculo de $\mathbf{L}$ podríamos haber tomado el instante en que $\psi = 0$.

Ahora, para calcular la derivada temporal de $\mathbf{L}$, notemos de nuevo que, en los puntos de equilibrio, θ es constante. Lo único que cambia con el tiempo es el versor $\hat{\varphi}(\varphi) = \hat{\varphi}(\omega t)$. Así resulta:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \Big(-I_1\omega\cos\theta + I_3\omega_3\Big)\omega\sin\theta\ \hat{\rho}(\varphi). \tag{31}$$

En los dos puntos de equilibrio $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, esta expresión se anula automáticamente. Según vimos antes, el otro posible punto de equilibrio es θ_0, definido por

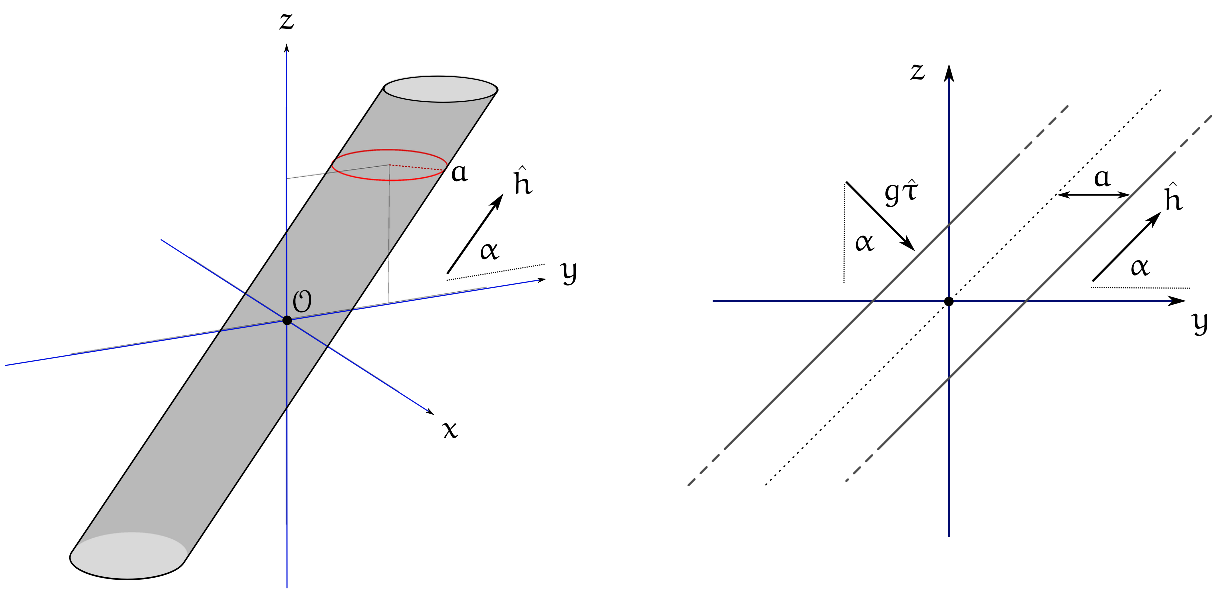
$$\cos\theta_0 = \frac{\lambda}{2} = \frac{I_3\omega_3}{I_1\omega}. \tag{32}$$

Vemos entonces que en este punto de equilibrio es también $\dot{\mathbf{L}} = 0$, puesto que en la Ec. (31) aparece la combinación

$$-I_1\omega\cos\theta + I_3\omega_3 = -I_1\omega\left(\cos\theta - \frac{I_3\omega_3}{I_1\omega}\right) = -I_1\omega\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right), \tag{33}$$

que se anula en $\theta = \theta_0$.

■ **Problema 2**. Una partícula de masa m está restringida a moverse sin rozamiento sobre la superficie de un cilindro oblicuo, infinito, de base circular de radio a, como muestra la figura. Sus generatrices están en la dirección $\hat{h} = \cos\alpha\ \hat{y} + \sin\alpha\ \hat{z}$, con $0 < \alpha < \pi$. Hay además un campo gravitatorio uniforme $\mathbf{g} = g\,\hat{\tau}$, donde $\hat{\tau} = \sin\alpha\ \hat{y} - \cos\alpha\ \hat{z}$.



a) Defina las coordenadas generalizadas que va a utilizar y escriba la posición de la partícula en términos de esas coordenadas.

b) Escriba el lagrangiano del sistema y las ecuaciones de Euler-Lagrange.

c) Identifique al menos dos integrales primeras de movimiento. Interprete su origen.

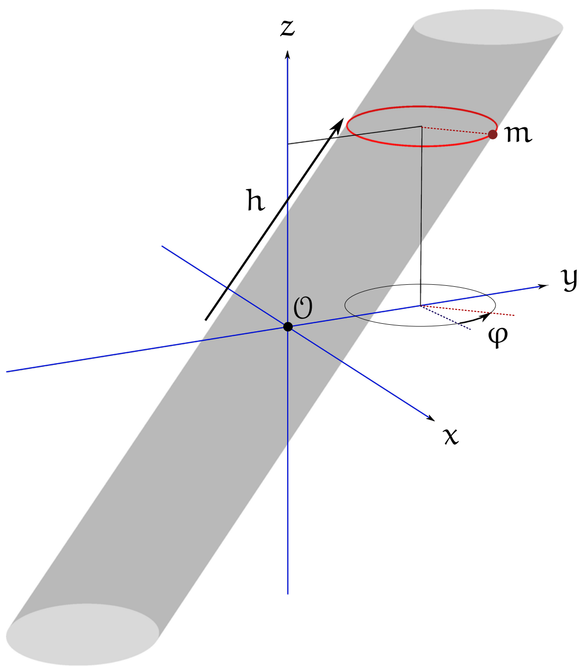
d) Defina un problema unidimensional equivalente para alguna de las coordenadas y escriba su ecuación de movimiento.

Ayuda: Si $\mathbf{A}$ es un vector constante, entonces $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{A}$. Ejemplo $\nabla(g\,\hat{z}\cdot\mathbf{r}) = g\,\hat{z}$.

■ **Solución**. Una elección cómoda de coordenadas generalizadas resulta de escribir la posición de la partícula en la forma

$$\mathbf{r}(h,\varphi) = h\hat{h} + a\hat{\rho}(\varphi), \tag{34}$$

donde $h = z/\sin\alpha$, con el significado evidente que muestra la figura.



Las coordenadas generalizadas son h y φ. La velocidad de la partícula es

$$\mathbf{v}(\varphi,\dot{h},\dot{\varphi}) = \dot{h}\hat{h} + a\dot{\varphi}\hat{\varphi}(\varphi). \tag{35}$$

En tanto que la energía cinética es

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}m\left(\dot{h}^2 + a^2\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{h}\dot{\varphi}\,\hat{h}\cdot\hat{\varphi}\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{h}^2 + a^2\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{h}\dot{\varphi}\,\cos\alpha\,\cos\varphi\right). \end{aligned} \tag{36}$$

El potencial gravitatorio a partir del cual se obtiene el campo $\mathbf{g}$ es

$$V(\mathbf{r}) = -mg\,\hat{\tau}\cdot\mathbf{r}. \tag{37}$$

Teniendo en cuenta que $\hat{h} \cdot \hat{\tau} = 0$, en términos de las coordenadas generalizadas resulta

$$V(h, \varphi) = -mg\Big[\hat{h} + a\hat{\rho}(\varphi)\Big] \cdot \hat{\tau} = -mga\, \hat{\rho}(\varphi) \cdot \hat{\tau} = -mga \sin\alpha\, \sin\varphi. \tag{38}$$

Notar que el potencial termina siendo sólo función de φ.

El lagrangiano se escribe entonces como

$$L(\varphi, \dot{h}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \left(\dot{h}^2 + a^2\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{h}\dot{\varphi}\, \cos\alpha\, \cos\varphi\right) + mga \sin\alpha\, \sin\varphi. \tag{39}$$

De aquí se deducen las ecuaciones

$$m\frac{d}{dt}\left(\dot{h} + a\dot{\varphi}\cos\alpha\, \cos\varphi\right) = 0, \tag{40}$$

$$a^2\ddot{\varphi} + a\ddot{h}\cos\alpha\, \cos\varphi - ga\sin\alpha\, \cos\varphi = 0. \tag{41}$$

La primera ecuación da una integral primera, que se lee así: el impulso generalizado asociado a h se conserva,

$$m\big(\dot{h} + a\dot{\varphi}\cos\alpha\, \cos\varphi\big) = p_h. \tag{42}$$

Además, p_h es la componente del impulso propiamente dicho en la dirección de $\hat{h}$. En efecto, la velocidad según esa dirección está dada por

$$\mathbf{v} \cdot \hat{h} = \dot{h} + a\dot{\varphi}\, \hat{\varphi} \cdot \hat{h} = \dot{h} + a\dot{\varphi}\cos\alpha\, \cos\varphi. \tag{43}$$

Esta conservación es fácil de entender si se piensa en que el campo gravitatorio actúa siempre perpendicular a las paredes del cilindro, que están orientadas según $\hat{h}$.

La Ec. (40) puede integrarse aún una vez más. Notando que $\dot{\varphi}\cos\varphi = d(\sin\varphi)/dt$, resulta

$$h + a\cos\alpha\, \sin\varphi = p_h t + \Big(h_0 + a\cos\alpha\, \sin\varphi_0\Big). \tag{44}$$

En resumen, se puede eliminar h en términos de φ.

La ecuación efectiva para φ, se obtiene usando la Ec. (40) para escribir $\ddot{h}$ y reemplazando en la Ec. (41). Del primer paso resulta

$$\ddot{h} = a\cos\alpha\Big(-\ddot{\varphi}\, \cos\varphi + \dot{\varphi}^2\sin\varphi\Big), \tag{45}$$

y del segundo,

$$a^2\ddot{\varphi} + (a\cos\alpha)^2\Big(-\ddot{\varphi}\, \cos\varphi + \dot{\varphi}^2\sin\varphi\Big)\cos\varphi - ga\sin\alpha\, \cos\varphi = 0 \tag{46}$$

Reagrupando términos queda

$$\Big[1 - (\cos\alpha\, \cos\varphi)^2\Big]\ddot{\varphi} + \cos^2\alpha\, \sin\varphi\, \cos\varphi\, \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{a}\sin\alpha\, \cos\varphi = 0. \tag{47}$$

A este mismo resultado debería llegarse a partir de la conservación del impulso p_h y de la conservación de la energía (el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, la energía cinética es una función cuadrática de las velocidades generalizadas y el potencial no depende de estas). La Ec. (42) implica

$$\dot{h} = \frac{p_h}{m} - a\dot{\varphi}\cos\alpha\,\cos\varphi. \tag{48}$$

Reemplazando luego en la expresión de la energía total, $T + V$, queda la siguiente ecuación de conservación:

$$\frac{1}{2}ma^2\left[1 - (\cos\alpha\,\cos\varphi)^2\right]\dot{\varphi}^2 - mga\sin\alpha\,\sin\varphi = \mathcal{E} - \frac{p_h^2}{2m}. \tag{49}$$

Si se deriva esta ecuación respecto del tiempo se obtiene otra vez la Ec. (47).

Fórmulas incluidas en la hoja del parcial:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{z} + \dot{\theta}\,\hat{\rho}(\varphi) + \dot{\psi}\,\hat{e}_3(\varphi,\theta).$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\,\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\,\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \\ \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta. \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{e}_1 = \sin\psi\left[\cos\theta\,\hat{\varphi}(\varphi) + \sin\theta\,\hat{z}\right] + \cos\psi\,\hat{\rho}(\varphi), \\ \hat{e}_2 = \cos\psi\left[\cos\theta\,\hat{\varphi}(\varphi) + \sin\theta\,\hat{z}\right] - \sin\psi\,\hat{\rho}(\varphi), \\ \hat{e}_3 = \cos\theta\,\hat{z} - \sin\theta\,\hat{\varphi}(\varphi). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\rho}} = \dot{\varphi}\hat{\varphi}, \\ \dot{\hat{\varphi}} = -\dot{\varphi}\hat{\rho}. \end{cases}$$

Fórmulas en el pizarrón:

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}|^2 = A^2 + B^2 + 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B},$$

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}|^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + 2\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}.$$