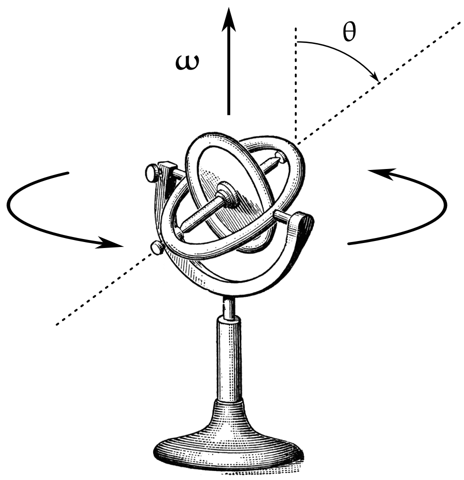
Mecánica Clásica (B)* – 2do. cuatrimestre de 2017 AD

Primer parcial – 12/10

1-2. El marco exterior de un giróscopo rota con velocidad angular <u>constante</u> $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{z}$, como muestra la figura, donde $\omega > 0$. Los momentos de inercia principales del giróscopo con respecto a su centro de masa son $I_1 = I_2$ e I_3, todos mayores que cero. Cuando el giróscopo está en reposo, no actúan torques externos respecto a su centro de masa.



a) En términos de los ángulos de Euler que sean necesarios, escriba el lagrangiano y las ecuaciones de Euler-Lagrange. ¿Hay coordenadas cíclicas? En tal caso, ¿cuáles son las funciones conservadas asociadas?

b) ¿Se conserva la función hamiltoniana h? ¿Se conserva la energía? Justificar.

c) A partir de las cantidades conservadas defina un problema unidimensional equivalente para el ángulo de Euler θ. Para fijar la notación entre todos los participantes, escriba el potencial efectivo como

$$U(\theta) = A\big(\cos^2\theta - \lambda\cos\theta\big) + \text{constante},$$

indicando los valores de las constantes A y λ. Recuerde: $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

d) Muestre que, dependiendo sólo del valor de λ, el potencial efectivo toma cualitativamente aspectos diferentes (¿tiene mínimos?, ¿máximos?, etc.). Grafique las alternativas posibles y diga a qué rango de valores de λ corresponde cada una. **Importante**: asumir que inicialmente es $\omega_3 > 0$.

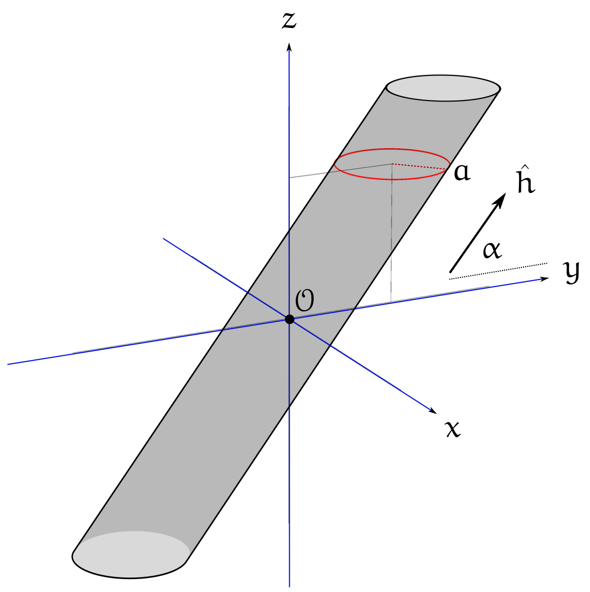
e) En cada uno de los casos identificados en el ítem anterior, diga cuáles son los puntos de equilibrio estable e inestable para el problema unidimensional en la variable θ.

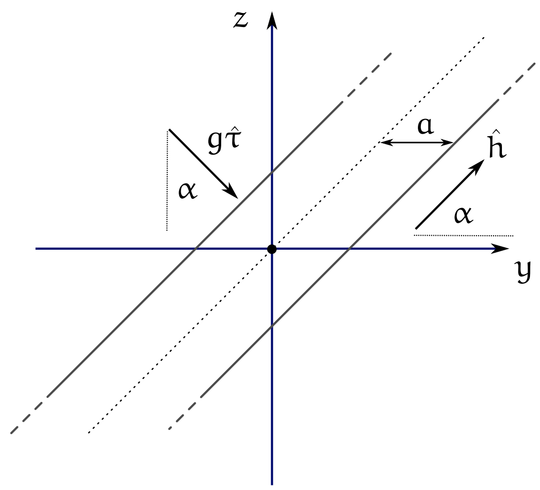
f) Suponga que el ángulo θ corresponde a alguno de los puntos de equilibrio del problema unidimensional. Calcule el torque que es necesario aplicar externamente respecto del centro de masa para mantener constante la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

---

*La **B** es de barato.

2-2. Una partícula de masa m está restringida a moverse sin rozamiento sobre la superficie de un cilindro oblicuo, infinito, de base circular de radio a, como muestra la figura. Sus generatrices están en la dirección $\hat{h} = \cos\alpha\ \hat{y} + \sin\alpha\ \hat{z}$, con $0 < \alpha < \pi$. Hay además un campo gravitatorio uniforme $\mathbf{g} = g\,\hat{\tau}$, donde $\hat{\tau} = \sin\alpha\ \hat{y} - \cos\alpha\ \hat{z}$.





a) Defina las coordenadas generalizadas que va a utilizar y escriba la posición de la partícula en términos de esas coordenadas.

b) Escriba el lagrangiano del sistema y las ecuaciones de Euler-Lagrange.

c) Identifique al menos dos integrales primeras de movimiento. Interprete su origen.

d) Defina un problema unidimensional equivalente para alguna de las coordenadas y escriba su ecuación de movimiento.

Ayuda: Si $\mathbf{A}$ es un vector constante, entonces $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{A}$. Ejemplo $\nabla(g\,\hat{z}\cdot\mathbf{r}) = g\,\hat{z}$.

Fórmulas prometidas:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{z} + \dot{\theta}\,\hat{\rho}(\varphi) + \dot{\psi}\,\hat{e}_3(\varphi,\theta).$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\ \sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\ \cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \\ \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta. \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{e}_1 = \sin\psi\ \Big[\cos\theta\ \hat{\varphi}(\varphi) + \sin\theta\ \hat{z}\Big] + \cos\psi\ \hat{\rho}(\varphi), \\ \hat{e}_2 = \cos\psi\ \Big[\cos\theta\ \hat{\varphi}(\varphi) + \sin\theta\ \hat{z}\Big] - \sin\psi\ \hat{\rho}(\varphi), \\ \hat{e}_3 = \cos\theta\ \hat{z} - \sin\theta\ \hat{\varphi}(\varphi). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\rho}} = \dot{\varphi}\hat{\varphi}, \\ \dot{\hat{\varphi}} = -\dot{\varphi}\hat{\rho}. \end{cases}$$

Problemas en hojas separadas escritas por una sola carilla. Pase en limpio los cálculos principales, el resto puede entregarse como borrador. Escriba lo mínimo indispensable. Piense que está por enviar un telegrama en el que cada palabra cuesta 10 pesos. Palabras de más de 4 sílabas valen por 2.