Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2017 (B)

Guía 7: *Ecuaciones de Hamilton, transformaciones canónicas, Hamilton-Jacobi.*

1. Escriba el hamiltoniano, las ecuaciones de Hamilton y dibuje los diagramas de fases de:

   a) Un oscilador armónico tridimensional (no necesariamente isótropo). Utilizar coordenadas cartesianas. Resuelva las ecuaciones.

   b) Una partícula en un potencial central $U(r)$. Halle constantes de movimiento. Suponga en particular que $U(r) = -k^2/r$ y discuta las órbitas posibles.

   c) Un trompo simétrico con un punto fijo en un campo gravitatorio uniforme. Halle constantes de movimiento.

2. Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para un oscilador armónico tridimensional isótropo en coordenadas cilíndricas y esféricas. Construya los diagramas de fases.

3. Una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía en el tiempo: $r = r(t)$, donde $r(t)$ es una función conocida. Obtenga el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discuta la conservación de la energía. ¿Es el hamiltoniano igual a la energía total?

4. Considere una partícula de masa unidad moviéndose en un plano bajo la influencia del potencial generalizado $V(r, \dot{r}) = (1 + \dot{r}^2)/r$, donde r es la distancia al origen. (Todas las constantes con dimensiones se han elegido de magnitud igual a 1). Encuentre los momentos generalizados p_r y p_θ, y el hamiltoniano. Obtenga las ecuaciones canónicas y muestre que el impulso angular se conserva. ¿Se conserva H? ¿Es $H = E$? Reduzca el problema para r a una ecuación diferencial de primer orden.

5. Escriba el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton para:

   a) Un trompo simétrico que se mueve libremente (sin gravedad).

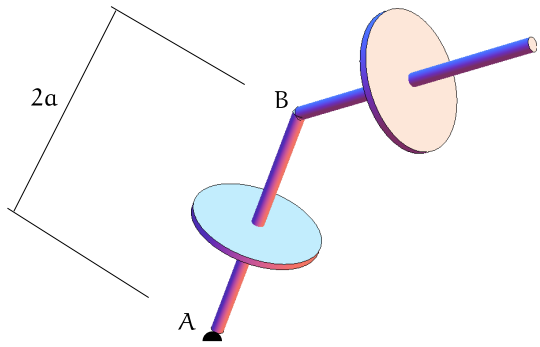
   b) Una máquina de Atwood, considerando los casos en que la polea, de radio R, tiene masa cero o masa M.

6. Un sistema consiste en dos masas puntuales m_1 y m_2 que interactúan con un potencial $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Muestre que su hamiltoniano puede escribirse como $H = H_{cm} + H_{rel}$, con

$$H_{cm} = \frac{P_{cm}^2}{2M}, \qquad H_{rel} = \frac{p_{rel}^2}{2\mu} + V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2},$$

   donde: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida del sistema, $M = m_1 + m_2$, $\mathbf{L}$ es el momento angular total y p_{rel} es el momento canónicamente conjugado de r.

7. Sea el sistema de la figura, compuesto por dos trompos simétricos cuyos discos se hallan fijos a la mitad de dos ejes idénticos de longitud $2a$. A es un punto fijo alrededor del cual el eje AB se mueve libremente. Los trompos están articulados en el punto B de tal manera que los dos ejes siempre están sobre un plano vertical en común. Escriba el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton del sistema.



8. Demuestre las siguientes propiedades de los corchetes de Poisson, siendo f, g, h funciones arbitrarias de p_i, q_i; $F(f)$ es una función de f y c es una constante.

$$\begin{cases} [f, c] = 0, \\ [f, f] = 0, \\ [f, g] + [g, f] = 0, \\ [f + g, h] = [f, h] + [g, h], \\ [fg, h] = f[g, h] + [f, h]g. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}[f, g] = \left[\dfrac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \dfrac{\partial g}{\partial t}\right], \\ [f, F(f)] = 0, \\ [f, g^n] = ng^{n-1}[f, g], \\ [g, F(f)] = F'(f)[g, f]. \end{cases}$$

9. *a*) Demuestre que

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

¿Qué obtiene para $f = q_i$ y $f = p_i$? Si f no depende explícitamente del tiempo, muestre que la condición necesaria y suficiente para que f sea constante de movimiento es que $[f, H] = 0$.

b) Muestre que si una coordenada q_i es cíclica, la transformación canónica de función generatriz $G = p_i$ es la transformación de simetría asociada al carácter cíclico de q_i. Observe que si f es una constante de movimiento, la transformación canónica infinitesimal de generatriz $G = f$ deja invariante al hamiltoniano. ¿Qué relación tiene esto con el teorema de Noether?

c) Muestre que si f y g son constantes de movimiento, también lo es $[f, g]$.

10. *a*) Calcule explícitamente, para una partícula, los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas de $\mathbf{L}$ con las de $\mathbf{p}$ y las de $\mathbf{r}$. Además calcule $[L_x, L_y]$, $[L_y, L_z]$, $[L_x, L^2]$, donde $L^2 = |\mathbf{L}|^2$.

    b) ¿Bajo qué condiciones pueden ser H y L^2 simultáneamente variables canónicas? Ídem para H y L_z.

    c) ¿Pueden ser L_x y L_y simultáneamente variables canónicas? Ídem para L_x y L^2.

    d) Muestre que, para una partícula sometida a un potencial con simetría cilíndrica alrededor del eje z, L_z es una constante de movimiento y que, si el potencial es central, entonces $\mathbf{L}$ es constante.

11. Pruebe que si se hace una transformación canónica de (q, p) a (Q, P) se tiene:

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i},$$
$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}.$$

12. Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para una partícula cargada en un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B}$, en la dirección $\hat{z}$. Tome $\mathbf{A} = Bx\hat{y}$ y recuerde que el potencial generalizado es $U = -(q/c)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$.

    a) Resuelva de nuevo el problema eligiendo ahora $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r}$.

    b) Demuestre que la transformación

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2), \qquad p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2),$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2), \qquad p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2),$$

    donde $\omega = qB/mc$, es canónica y úsela para encontrar una solución alternativa.

13. Considere un oscilador bidimensional con hamiltoniano

$$H(p, q) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

    Muestre que la transformación que sigue es canónica y halle el nuevo hamiltoniano $H'(P, Q)$ y las correspondientes ecuaciones de Hamilton:

$$x = X\cos\lambda + \frac{P_y\sin\lambda}{m\omega}, \qquad p_x = -m\omega Y\sin\lambda + P_x\cos\lambda,$$
$$y = Y\cos\lambda + \frac{P_x\sin\lambda}{m\omega}, \qquad p_y = -m\omega X\sin\lambda + P_y\cos\lambda.$$

    Describa el movimiento del oscilador bidimensional cuando $y(0) = 0$ y $p_y(0) = 0$.

14. Para oscilador unidimensional de hamiltoniano $H = p^2/2m + kq^2/2$, muestre que la transformación $Q = \ln(\frac{\sin p}{q})$, $P = q \cot p$ es canónica, y determine las funciones generatrices $F_1(q, Q)$ y $F_2(q, P)$.

15. Considerar el sistema físico cuya energía cinética es $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(q_1^2 + q_2^2)$ y cuya energía potencial resulta $V = (q_1^2 + q_2^2)^{-1}$, donde q_1, q_2, $\dot{q}_1$ y $\dot{q}_2$ son coordenadas y velocidades generalizadas. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi para este sistema? Resuelva esta ecuación para encontrar la función principal de Hamilton S. Encuentre o deduzca de allí el comportamiento dinámico del sistema.

16. Considere un movimiento unidimensional de una partícula de masa m y carga e sometida a una campo eléctrico uniforme dependiente del tiempo $E(t)$. Encuentre el hamiltoniano del sistema. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi? Muestre que la función principal de Hamilton puede escribirse como

$$S = e\int_0^t E(t')dt'x + \alpha x - \phi(t),$$

donde α es una constante y ϕ es una función del tiempo. Resuelva la ecuación para ϕ. De allí encuentre la posición y el momento canónico conjugado en función del tiempo.

17. Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x sometida a un potencial $V = a\sec^2(x/l)$, donde a y l son constantes. Resuelva la ecuación de H–J encontrando una expresión integral para S. Encuentre $x(t)$ utilizando S.

18. Considere un oscilador armónico unidimensional:

    a) Halle su hamiltoniano y las correspondientes ecuaciones de Hamilton, construya los diagramas de fases, halle puntos de equilibrio y discuta su estabilidad, discuta la existencia de movimientos de libración y rotación.

    b) Halle la trasformación canónica de función generatriz $F_1(Q, q) = \lambda q^2 \cot Q$ eligiendo λ para que el nuevo hamiltoniano sea $K(Q, P) = \omega P$.

    c) Muestre que (Q, P) son variables de ángulo–acción. Halle el área encerrada por las curvas de E constante en el espacio de fases, y muestre que la curva que corresponde a un P dado encierra un área $2\pi P$.

    d) Halle la función generatriz de tipo $F_2(P, q)$ que genera la misma transformación canónica $(q, p) \to (Q, P)$. ¿Qué relación hay entre F_1 y F_2?

19. Demuestre que la función generatriz de la transformación canónica que lleva a variables de ángulo y acción es $F_2(q, J) = \int^q p(J, q')\, dq'$. Pruebe que esta función no es periódica como función de q, pero que $F_1(q, Q)$ sí lo es.

20. Considere una partícula sujeta a una fuerza central cuyo potencial $V(r)$ es tal que $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$ y $V(r) < 0$ suficientemente cerca de $r = 0$.

a) Encuentre la acción reducida $A(E, r, s)$ del problema unidimensional equivalente.

b) Proponga una función generatriz $F(E, r, s, \phi)$ donde (E, s) son los nuevos momentos y (r, ϕ) las coordenadas sobre el plano que contiene la trayectoria.

c) Encuentre las variables canónicas conjugadas de E y s.

d) Encuentre las variables de acción asociadas a (p_r, r) y (p_ϕ, ϕ).

e) Considere el caso particular $V(r) = 0$ si $r > R$, $V(r) = A(r^2 - R^2)$ si $r \leqslant R$, donde $A > 0$, y encuentre para este caso la separatriz entre órbitas abiertas y cerradas en el espacio de fases.

21. Considere el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2.$$

Resuelva el problema utilizando la técnica de Hamilton–Jacobi. Encuentre la órbita general de la solución de la ecuación de H–J. ¿Qué sistema físico podría corresponder a este problema? Resuelva este problema de otras tres maneras:

a) Resolviendo las ecuaciones canónicas.

b) Haciendo una transformación canónica con $Q_1 = Ap_1$, $P_1 = B(p_2 - kq_1)$, eligiendo Q_2 y P_2 convenientemente (A y B son constantes), resolviendo para Q_i y P_i y luego antitransformando.

c) Por medio de variables de ángulo–acción.

22. Considere un péndulo físico formado por una barra de longitud l, que puede moverse en un plano vertical, con uno de sus extremos fijo (la barra gira libremente a su alrededor). El momento de inercia de la barra respecto al punto fijo es I. Hay gravedad.

a) Muestre que el hamiltoniano del sistema es $H = \frac{1}{2}I(p_\psi^2 - 2\alpha^2 \cos\psi)$ donde ψ es el ángulo de la barra con la vertical, p_ψ su momento conjugado y α una constante a determinar.

b) Construya el correspondiente diagrama de fases; halle puntos de equilibrio y discuta su estabilidad; construya la curva separatriz correspondiente (halle su ecuación). Determine los movimientos de libración y rotación posibles y halle su período.

c) Muestre que el área encerrada por la separatriz es 16α. Deduzca que el máximo valor de la variable de acción para el movimiento de libración es $8\alpha/\pi$.

23. Una partícula de masa m se mueve en el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si } x < 0, \\ A[a^2 - (x-a)^2], & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2a \qquad (\text{con } A, a > 0), \\ 0, & \text{si } x \geqslant 2a. \end{cases}$$

La partícula se mueve en la región $x \geqslant 0$, y cada vez que alcanza el punto $x = 0$ rebota elásticamente. Construir el diagrama de fases correspondiente, mostrando claramente las regiones de libración y movimiento no acotado. Muestre que la variable de acción para el movimiento de libración es

$$J = \frac{a^2\sqrt{2mA}}{2\pi}\left[\epsilon - \tfrac{1}{2}(1-\epsilon^2)\ln\left[\frac{(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)}\right]\right]$$

si $E = \epsilon^2 a^2 A$ ($\epsilon < 1$), que el período de libración es $\tau = 2\pi\dfrac{dJ}{dE}$, y que si $\epsilon \to 1, \tau \to \infty$.

24. Una partícula de masa m se mueve en el potencial

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\lambda^2(x+a)^2, & \text{si } x \leqslant 0, \\ \\ \frac{1}{2}m\lambda^2(x-a)^2, & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

a) Plantee las ecuaciones de Hamilton, construya diagramas de fases, considerando especialmente las curvas de fases próximas al origen.

b) Muestre que el espacio de fases se divide en 3 regiones invariantes, y en cada una se definen distintas variables de ángulo–acción. Halle la variable de acción en función de E en cada caso.

25. Considere una partícula con hamiltoniano $H = p^2/2m + V(q)$ para cada uno de los siguientes casos: $V(q) = -k^2/q + l^2/2mq^2$ y $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + l^2/2mq^2$.

a) Dibuje los diagramas de fases, escriba las ecuaciones de las curvas separatrices e indique las regiones que corresponden a movimientos de libración y rotación.

b) Para los movimientos de libración exprese a la variable de acción como función de la energía y halle la relación $\psi = \psi(q, J)$, donde ψ es la variable de ángulo. ¿Cómo es la frecuencia del movimiento?

c) Encuentre la energía de las trayectorias que satisfacen las relaciones $J = n\hbar$ y $l = k\hbar$ (con n, k números naturales y $\hbar$ constante).

26. Una partícula se mueve en una sola dimensión sometida a un potencial

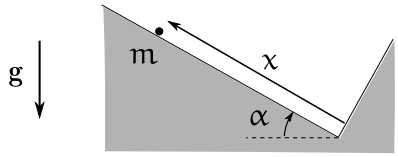
$$V(x) = \begin{cases} k(x-a)^2, & \text{si } x > a, \\ \\ \dfrac{V_0}{a}(a - |x|), & \text{si } |x| < a, \\ \\ k(x+a)^2, & \text{si } x < -a. \end{cases}$$

a) Dibuje el diagrama de fases indicando: i) en cuántas regiones queda dividido el espacio de fases, ii) cuál es la ecuación que define a la curva separatriz, iii) cómo son los posibles movimientos.

b) Calcule la variable de acción para los movimientos con $E < V_0$. ¿Cuánto vale el período de dichos movimientos? ¿Las oscilaciones son armónicas?

27. Escriba las variables de acción y ángulo para las rotaciones en un plano de una barra con un punto fijo, sometida a un potencial angular $V(\psi) = k|\psi|/\pi$ si $-\pi < \psi < \pi$, con $V(\psi)$ periódico, $V(\psi + 2\pi) = V(\psi)$ y $k > 0$.

28. Considere el sistema de la figura: una masa m se mueve sobre un plano inclinado un ángulo α con la horizontal y choca elásticamente con una pared en la base del plano.



a) Construya el diagrama de fases y calcule la frecuencia del movimiento para un dado valor de la variable de acción J.

b) Encuentre la variable de ángulo θ en función de q.

29. Considere una partícula sometida a un potencial $V(q) = U \tan^2(\alpha q)$, U, α constantes positivas. Halle el hamiltoniano y plantee las ecuaciones de Hamilton. Construya el diagrama de fases. Halle las variables de acción y ángulo del problema.

30. Encuentre la variable de acción para una partícula de masa m que se mueve con velocidad v y rebota elásticamente entre dos paredes fijas separadas por una distancia d. Sugerencia: haga el diagrama de fases.

31. Una partícula se mueve en el espacio bajo la acción de un potencial central $V(|\mathbf{r}|)$.

a) Calcule las variables de acción para la parte angular del movimiento. ¿Cómo se expresa el módulo del momento angular como función de las mismas?

b) ¿Bajo qué condiciones el movimiento de la partícula será periódico? Demuestre explícitamente que para el problema de Kepler y para el oscilador armónico el movimiento es periódico pero que para un potencial de la forma $V = a/r^2$ no lo es. Obtenga la frecuencia de movimiento como función de la energía.

c) ¿Cuál es la energía de las órbitas definidas por las relaciones $J_i = n_i\hbar$? ¿Cuánto vale el momento angular de las mismas? (n_i entero y $\hbar$ constante).

32. Dado el potencial $V(q) = \epsilon(1 - \alpha/q)^2$.

a) Dibujar el diagrama de fases indicando las zonas de libración.

b) Calcular las variables de ángulo y acción $J = J(E)$ y $\psi = \psi(q, J)$.

c) ¿Qué pasa con el período del movimiento cuando la energía tiende al valor que corresponde a la curva separatriz?