**Mecánica Clásica (B)– 2do. cuatrimestre de 2017**

**Una confusión cotidiana**

En algunos problemas de cuerpo rígido, para escribir la posición del centro de masa resulta cómodo usar una coordenada angular. Es común que esa coordenada esté relacionada con los ángulos de Euler, sea a través de algún vínculo o no. Por ejemplo, tomemos el caso de una peonza simétrica con un punto fijo. Elijamos como origen el punto fijo. Si se toman ejes principales que pasen por el centro de masa, lo más cómodo es tomar el eje 3 del cuerpo según el eje de simetría. La orientación del eje de simetría queda definida por los ángulos de Euler $\phi$ y $\theta$. Como el centro de masa está sobre el eje de simetría, a una distancia $L$ del origen, entonces sabiendo cuál es la orientación del eje 3 también sabremos la posición del centro de masa. Luego podremos calcular su velocidad, su contribución al momento angular respecto del origen, su energía de traslación, etc.

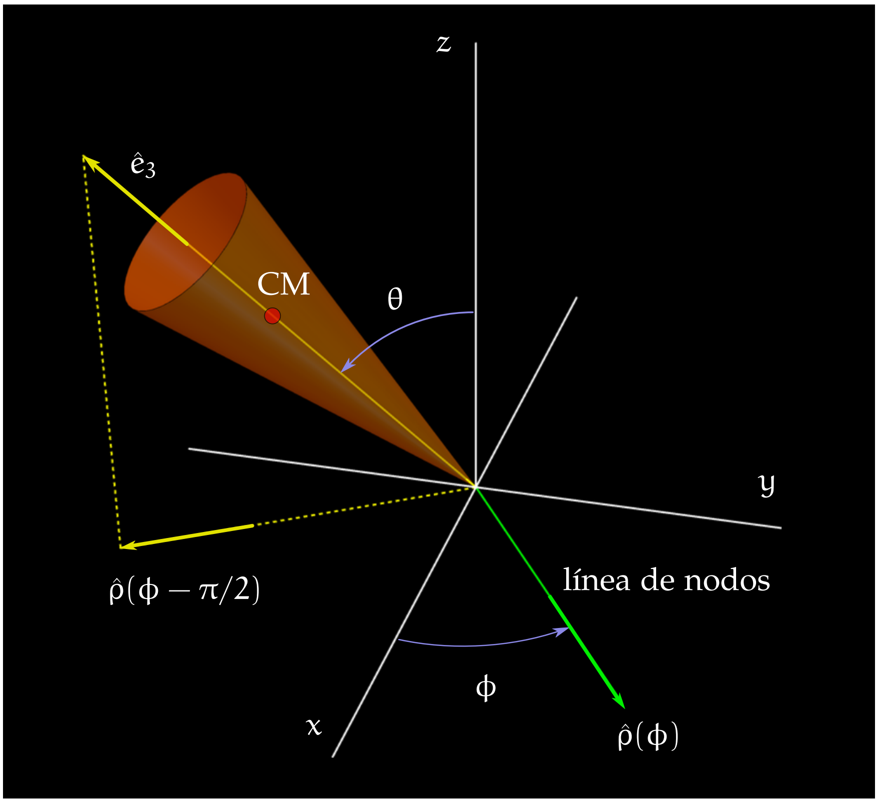
Un error común es decir que el centro de masa está entonces en la posición

$$\mathbf{R}_{\mathrm{CM}}(\theta, \phi) = L\,\hat{r}(\theta, \phi), \qquad (!)$$

o, en polares,

$$\mathbf{R}_{\mathrm{CM}}(\theta, \phi) = L\,\sin\theta\;\hat{\rho}(\phi) + L\,\cos\theta\;\hat{z}. \qquad (!)$$

como si fuera el ángulo $\phi$ el ángulo azimutal que corresponde al eje 3. El problema está en que la orientación del eje 3, si bien está definida por los ángulos $\theta$ y $\phi$, no corresponde a un ángulo azimutal $\phi$, sino a $\phi - \pi/2$.



Cuando se usan ángulos Euler, el ángulo $\phi$ define la orientación de la línea de nodos, que es perpendicular al eje 3. La línea de nodos está orientada según el versor $\hat{\rho}(\phi)$. El versor que corresponde al eje 3 no tiene su proyección sobre el plano $xy$ según $\hat{\rho}(\phi)$, sino que

$$\hat{e}_3(\theta, \phi) = -\sin\theta\ \hat{\phi}(\phi) + \cos\theta\ \hat{z}, \tag{1}$$

es decir, usando el versor $\hat{\rho}$,

$$\hat{e}_3(\theta, \phi) = \sin\theta\ \hat{\rho}(\phi - \pi/2) + \cos\theta\ \hat{z}. \tag{2}$$

Así, el ángulo azimutal que corresponde al centro de masa es $\phi - \pi/2$. Esto puede no importar mucho si la única aparición de $\phi$ es a través de su derivada $\dot{\phi}$. Pero si tienen que calcular productos vectoriales o componer velocidades, entonces sí tiene mucha importancia que elijan las direcciones correctas.

Para darse una idea de la magnitud de esta confusión es suficiente con decir que Landau le dedica una nota a pie de página, que en un libro normal equivaldría a una sección de capítulo de varias páginas. No sólo eso, sino que aún tiene la exuberancia de citar esa misma nota en otros dos o tres lugares del capítulo. La nota está en la página 133 de la edición en castellano, en la sección 35; página 110 en la edición en inglés. Copiamos la nota y las citas posteriores aquí abajo.

[1] Los ángulos $\theta$ y $\phi - \frac{1}{2}\pi$ son, respectivamente, el ángulo polar y el azimut de la dirección $x_3$ con respecto a los ejes $X$, $Y$, $Z$. Los ángulos $\theta$ y $\frac{1}{2}\pi - \psi$ son, respectivamente, el ángulo polar y el azimut de la dirección $z$ con respecto a los ejes $x_1$, $x_2$, $x_3$.

• • •

vector constante **M**. Puesto que el ángulo polar y el azimut del eje $Z$ con respecto a los ejes $x_1$, $x_2$, $x_3$ son, respectivamente, $\theta$ y $\frac{1}{2}\pi - \psi$ (véase la nota al pie de la pág. 133), se obtiene tomando las componentes de **M** sobre los ejes $x_1$, $x_2$, $x_3$:

• • •

(el ángulo polar y el azimut de la dirección de $\mathbf{n}_3$ con respecto a los ejes $X$, $Y$, $Z$ son $\theta$ y $\phi - \frac{1}{2}\pi$; véase la nota al pie de la pág. 133). Escribimos también, utilizando las fórmulas (37.13):