Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2017 (B)

Hecha fácil canónica Perturbación a orden primer*

ADVERTENCIA: TODAS LAS IGUALDADES DEBEN ENTENDERSE A ORDEN ϵ. NO SE USAN AQUÍ EN NINGÚN MOMENTO LOS SÍMBOLOS $\approx$ NI $\simeq$. SE DAN POR SOBREENTENDIDOS ALLÍ DONDE DEBIEREN FIGURAR.

Tutorial

- *Primer paso.* Asegúrate de tener un hamiltoniano. Si aún no tienes uno, puedes comprar el tuyo en cualquier comercio que trabaje con lagrangianos. También hay sitios que ofrecen hamiltonianos de segunda mano a un precio más accesible. (Si eres inescrupuloso, mira nuestro tutorial sobre libgen).

- *Segundo paso.* ¿Está tu hamiltoniano separado en un término de orden cero más una perturbación? Para verificarlo, abre con delicadeza la cubierta protectora de tu hamiltoniano y observa con atención la pieza color naranja. Puede ser que tu hamiltoniano ya haya venido separado en un término no perturbado más la perturbación,

$$H = H_0 + \epsilon H_1. \tag{1}$$

  Pero también suele ocurrir que tienes un hamiltoniano sin escindir, y deberás entonces llevarlo a la forma (1). Consulta nuestro tutorial al respecto o, si tu hamiltoniano es original, llama al servicio postventa.

- *Tercer paso.* Por lo común tu hamiltoniano vendrá escrito en las variables canónicas p y q. En cualquier caso, debes tener a la vista algo del estilo

$$H(q, p) = H_0(q, p) + \epsilon H_1(q, p). \tag{2}$$

- *Cuarto paso.* Concéntrate en H_0. Debes encontrar la transformación que lleva de las variables q y p a las variables de ángulo-acción de H_0. Serán un par de relaciones de la forma:

$$q = q(\theta, J),$$

$$p = p(\theta, J). \tag{3}$$

  Estas ecuaciones se completan con la ecuación para la energía en función de J,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0(J), \tag{4}$$

*Centro de atención al consumidor: zanellaj@df.uba.ar que es equivalente a decir que, en términos de sus propias variables de ángulo-acción, H_0 se escribe como

$$H_0(J) = \mathcal{E}_0(J), \tag{5}$$

independiente de θ. A menos que se trate de un caso muy simple, será necesario que encuentres las transformaciones (3) vía la ecuación de Hamilton-Jacobi para la función característica $W(q, \mathcal{E})$. Puesto que muchos problemas usan para H_0 el hamiltoniano del oscilador lineal, es una buena medida que recuerdes las expresiones pertinentes a este caso:

$$\left.\begin{aligned} H(J) &= \omega J, \\ q(\theta, J) &= \sqrt{\frac{2J}{m\omega}}\sin\theta, \\ p(\theta, J) &= \sqrt{2Jm\omega}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \quad \text{oscilador lineal.} \tag{6}$$

- *Puinto qaso*. Suponiendo que ya tienes las relaciones (3), y que conoces la función $H_0(J)$, entonces simplemente reemplaza q y p en la ec. (1) por las funciones (3). Así tendrás el hamiltoniano perturbado en función de las variables de ángulo-acción de H_0. Es decir,

$$H(\theta, J) = H_0(J) + \epsilon H_1(\theta, J). \tag{7}$$

Ten presente que ahora tu objetivo es encontrar, hasta orden ϵ, la transformación que lleva a las coordenadas de ángulo-acción para el hamiltoniano perturbado, a las que llamaremos φ e I. En estas coordenadas el problema es trivial: I es constante y $\varphi = \omega(I)t + \varphi_0$. De manera que si conoces la transformación que lleva de θ y J a φ e I, y viceversa, también tendrás la evolución de las variables θ y J. A su vez, esa evolución te permitirá escribir $q(t)$ y $p(t)$, usando para eso las transformaciones entre las variables originales q y p y las variables de ángulo-acción de H_0.

- **Sexto piso**. Si sólo te interesa calcular el cambio en la energía y en la frecuencia, entonces usa este resultado, válido a primer orden:

$$\mathcal{E}(I) = \mathcal{E}_0(I) + \epsilon \overline{H}_1(I), \tag{8}$$

donde

$$\overline{H}_1(I) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\ H_1(\theta, I). \tag{9}$$

Esto te dará también la frecuencia corregida hasta orden ϵ,

$$\omega(I) = \frac{d\mathcal{E}(I)}{dI} = \omega_0(I) + \epsilon\omega_1(I), \tag{10}$$

donde

$$\omega_1(I) = \frac{d\overline{H}_1(I)}{dI}. \tag{11}$$

- Séptimo cielo. Si eres audaz y no te falta ambición, lo que más te interesará es ver qué le pasa a la trayectoria del sistema perturbado. Querrás a toda costa graficar $q(t)$ y $p(t)$. Después de todo, es lo único que puede conformar a tus sentidos. Para eso será necesario que encuentres la relación entre las variables de ángulo-acción de H_0 y las de H. Debes recordar que la transformación canónica que realiza el cambio es, a primer orden en ϵ,

$$y(\theta, I) = \theta I + \epsilon y_1(\theta, I), \tag{12}$$

que implica las relaciones mixtas entre nuevas y antiguas variables de ángulo-acción:

$$\begin{aligned} \varphi(\theta, I) &= \theta + \epsilon \frac{\partial y_1}{\partial I}(\theta, I), \\ J(\theta, I) &= I + \epsilon \frac{\partial y_1}{\partial \theta}(\theta, I). \end{aligned} \tag{13}$$

Hasta orden ϵ, sin faltar a la verdad, puedes reemplazar θ por φ en el argumento de las derivadas de la función y_1. De modo que la transformación resulte bien separada en los dos conjuntos de variables. De un lado las nuevas, del otro las antiguas. Así:

$$\begin{aligned} \theta(\varphi, I) &= \varphi - \epsilon \frac{\partial y_1}{\partial I}(\varphi, I), \\ J(\varphi, I) &= I + \epsilon \frac{\partial y_1}{\partial \theta}(\varphi, I). \end{aligned} \tag{14}$$

Pero ahora necesitas y_1. ¡Qué no te gane el desconsuelo! Usa la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial y_1}{\partial \theta}(\theta, I) = \frac{1}{\omega_0(I)} \Big[\overline{H}_1(I) - H_1(\theta, I)\Big]. \tag{15}$$

Puedes alegrarte: al mismo tiempo, según la ec. (14), esta expresión te da J sin necesidad de calcular y_1 de manera explícita. Fíjate si no:

$$J(\varphi, I) = I + \frac{\epsilon}{\omega_0(I)} \Big[\overline{H}_1(I) - H_1(\varphi, I)\Big]. \tag{16}$$

Volviendo al asunto de calcular y_1. Integra la ec. (15). Esto es:

$$y_1(\theta, I) = \frac{1}{\omega_0(I)} \int_0^\theta d\theta' \, \Big[\overline{H}_1(I) - H_1(\theta', I)\Big]. \tag{17}$$

Aquí el límite inferior de la integral es arbitrario. Elegimos como ejemplo $\theta = 0$ por simplicidad. Es cierto que puedes sumar a y_1 una función de I, pero su agregado sólo se traducirá en una redefinición trivial del ángulo φ. Ene fecto: sumar una función $F(I)$ significaría cambiar φ por $\varphi + \epsilon F'(I)$. El cambio en φ es equivalente a un corrimiento en el origen de φ. No importa que ese corrimiento dependa de I. Recuerda que el movimiento ocurre en superficies de I constante. Para cada I puedes elegir el origen de φ que más te plazca.

- *Octava maravilla*. Mezcla ahora todos los ingredientes. Lo harás en tres (3) etapas, con movimientos envolventes, nunca revolviendo. (Consulta nuestro tutorial al respecto). La idea es escribir (de atrás hacia adelante) q y p como funciones de J y de θ, y a su vez J y θ como funciones de φ e I, y finalmente, φ e I como funciones del tiempo (aunque debes tener presente que I es constante, de modo que su dependencia en el tiempo es trivial). Vamos a por ello.

  1. Primo. Escribirás φ en función del tiempo. Esto te dará muy poco trabajo: debido a que φ es variable de ángulo-acción de H, su evolución es lineal:
  $$\varphi(t, I, \varphi_0) = \omega(I)t + \varphi_0. \tag{18}$$
  Por simplicidad omitiremos la fase φ_0, mientras no sea fundamental.
  2. Secundo. Debes escribir θ y J en función del tiempo. Su dependencia temporal les llega a través de las relaciones (14),
  $$\theta(t, I) = \omega(I)t - \epsilon\frac{\partial y_1}{\partial I}\Big(\omega(I)t, I\Big),$$
  $$J(t, I) = I + \epsilon\frac{\partial y_1}{\partial \theta}\Big(\omega(I)t, I\Big). \tag{19}$$
  3. Tertio y último. Debes escribir q y p como funciones del tiempo. Su dependencia temporal les llega a través de la dependencia temporal de θ y J, quienes a su vez la reciben de φ. Reemplazando en las ecs. (3) obtendrás
  $$q(t, I) = q\Big(\theta(t, I), J(t, I)\Big),$$
  $$p(t, I) = p\Big(\theta(t, I), J(t, I)\Big). \tag{20}$$
  Deberás hacer explícitamente los reemplazos dados en la ec. (19):
  $$q(t, I) = q\left(\omega(I)t - \epsilon\frac{\partial y_1}{\partial I}\Big(\omega(I)t, I\Big), I + \epsilon\frac{\partial y_1}{\partial \theta}\Big(\omega(I), t\Big)\right), \tag{21}$$
  y de manera similar para $p(t, I)$.

- Últimos detalles. Brillo y acabado a la cera.

  a) Para ser consistente con el orden de ϵ prometido, debes expandir las funciones $q(t, I)$ y $p(t, I)$ hasta primer orden en ϵ. Llamando para abreviar $\omega = \omega(I)$, expandiendo la ec. (21) hasta orden ϵ, obtendrás

$$q(t, I) = q(\omega t, I) + \epsilon \left[-\frac{\partial q}{\partial \theta}(\omega t, I) \, \frac{\partial y_1}{\partial I}(\omega t, I) + \frac{\partial q}{\partial J}(\omega t, I) \, \frac{\partial y_1}{\partial \theta}(\omega t, I) \right], \tag{22}$$

y análogamente para $p(t, I)$. Estas ecuaciones son el resultado final que buscabas. Si has llegado hasta aquí puedes darte por satisfecho. Sin embargo, nada habrás ganado si no entiendes la importancia del ítem que viene a continuación.

b) Toma nota de lo siguiente: aunque ω depende de ϵ, ec. (10), no hemos considerado esta dependencia al hacer la expansión (22). Incluso dentro del corchete, hemos escrito ωt y no $\omega_0 t$. Este corchete ya está multiplicado por ϵ, así que es natural que te preguntes por qué no reemplazamos ahí ω por ω_0. Muy buena pregunta.

   El punto central de todo este proceso se reduce a la siguiente directiva. Si tienes una función $f(\omega t)$, no debes caer en la tentación de escribir

$$\begin{aligned} f(\omega t) &= f(\omega_0 t + \epsilon \omega_1 t) && \text{hasta aquí está bien} \\ &= f(\omega_0 t) + \epsilon \omega_1 t \, f'(\omega_0 t). && \text{No \& Mil veces No} \end{aligned}$$

   Esto destruiría todo lo hecho, introduciendo un término que inevitablemente crece sin límite. Más aún, perderías la periodicidad del movimiento, la cual debería estar asegurada desde el comienzo por la forma del hamiltoniano. El asunto es que, si bien ϵ es un parámetro pequeño, el producto $\epsilon \omega_1 t$ a la larga tomará valores tan grandes como se quiera. Nadie en sus cabales aproximaría la función $\sin(a+x) = \sin a + x \cos a$, si su intención es usar la función en todo el eje x. Mira el problema 22 del capítulo 8 del libro de Percival y Richards. (Si quieres estar a tono con estos eminentes autores, visita el sitio web de nuestros auspiciantes https://www.marmite.co.uk/).

c) *Comentario al margen*. Presta atención al hecho de que el término entre llaves en la ec. (22) es el corchete de Poisson de y_1 con q. Esto no es casualidad. A orden ϵ estamos obteniendo un resultado que es equivalente a una transformación canónica infinitesimal.

d) *Condiciones iniciales*. Sabes que la solución del movimiento debe tener dos constantes arbitrarias que permitan fijar las condiciones iniciales. Esas constantes son I y φ_0. De la última sólo llevamos hasta ahora un registro tácito. Evaluando en $t = 0$ tendrás las ecuaciones que las determinan.

Un ejemplo tomado de la vida diaria

Nos llevó bastante explicar lo anterior, pero su aplicación es bien sencilla. Los únicos obstáculos son las integrales y las funciones inversas. Abrimos el libro de Goldstein y tomamos un problema al azar. Es el problema 7 del capítulo 11 en la segunda edición en español. Aparece el siguiente hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega_0^2 q^2\right) - \frac{p^4}{8m^3c^2}, \tag{23}$$

con el significado físico de ser la aproximación no trivial a orden más bajo del hamiltoniano de una partícula relativista en un potencial armónico, donde c es, por supuesto, la velocidad de la luz. Vamos paso por paso:

1. El hamiltoniano H_0 es el del oscilador armónico. La perturbación ϵH_1 tiene la forma

$$\epsilon H_1 = \epsilon p^4, \tag{24}$$

   donde $\epsilon = -1/(8m^3c^2)$.

2. En términos de las variables de ángulo-acción de H_0, ecs. (6), resulta

$$H(\theta, J) = \omega_0 J + \epsilon (2m\omega_0 J)^2 \cos^4\theta. \tag{25}$$

3. Ahora calculamos $\overline{H}_1$, como paso previo para calcular y_1 y como paso definitivo para calcular las correcciones a la energía y a la frecuencia:

$$\overline{H}_1(I) = (2m\omega_0 I)^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \;\cos^4\theta. \tag{26}$$

   La forma de resolver estas integrales está explicada al final de todo. Se puede consultar después. El resultado es

$$\overline{H}_1(I) = \frac{3}{8}(2m\omega_0 I)^2 = \frac{3}{2}(m\omega_0 I)^2. \tag{27}$$

   Derivando respecto de I calculamos la frecuencia corregida:

$$\omega(I) = \omega_0 + 3\epsilon(m\omega_0)^2 I. \tag{28}$$

   Es decir,

$$\omega_1(I) = 3(m\omega_0)^2 I. \tag{29}$$

4. La ecuación que determina a y_1 es

$$y_1(\theta, I) = \frac{1}{\omega_0}\int_0^\theta d\theta' \left[\overline{H}_1(I) - H_1(\theta, I)\right] = \frac{(2m\omega_0 I)^2}{\omega_0}\int_0^\theta d\theta' \left[\frac{3}{8} - \cos^4\theta\right]. \tag{30}$$

   La integral está explicada al final de todo. La fórmula relevante es la ec. (54). Obtenemos

$$y_1(\theta, I) = -\tfrac{1}{8}(mI)^2\omega_0\big(8\sin 2\theta + \sin 4\theta\big). \tag{31}$$

5. Con y_1 a la vista, la relación (14) entre los dos pares de variables de ángulo-acción resulta

$$\theta(\varphi, I) = \varphi + \tfrac{1}{4}\epsilon\, m^2 I\omega_0\,(8\sin 2\varphi + \sin 4\varphi)\,,$$
$$J(\varphi, I) = I - \tfrac{1}{2}\epsilon\, \omega_0 (mI)^2\,(4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi)\,. \tag{32}$$

Alternativamente, para calcular J podríamos haber usado la ec. (16).

6. Con θ y J reveladas, escribimos q y p. Esto da un poco de trabajo, porque necesitamos expandir algunas funciones hasta orden ϵ. Empezando por q, queda:

$$q(\varphi, I) = \sqrt{\frac{2J(\varphi, I)}{m\omega_0}}\sin\theta(\varphi, I) =$$
$$= \sqrt{\frac{2I}{m\omega_0}}\Big[1 - \tfrac{1}{4}\epsilon m^2 I\omega_0\,(4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi)\Big]\Big[\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\epsilon m^2 I\omega_0\,(8\sin 2\varphi + \sin 4\varphi)\cos\varphi\Big]$$
$$= \sqrt{\frac{2I}{m\omega_0}}\,\Big\{\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\epsilon m^2 I\omega_0\Big[-\big(4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi\big)\sin\varphi + \big(8\sin 2\varphi + \sin 4\varphi\big)\cos\varphi\Big]\Big\}\,. \tag{33}$$

Dos fórmulas fueron necesarias para escribir esto, a saber:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2), \tag{34}$$
$$\sin(\alpha + x) = \sin\alpha + x\cos\alpha + \mathcal{O}(x^2). \tag{35}$$

A propósito de lo que advertíamos al final del tutorial. La aproximación (35) ha sido aplicada a términos de la forma

$$\sin\big(\varphi + \epsilon\alpha\cos n\varphi + \epsilon\beta\sin m\varphi\big) = \sin\varphi + \epsilon\big(\alpha\cos n\varphi + \beta\sin m\varphi\big)\cos\varphi, \tag{36}$$

donde $\varphi = \omega t$. Esto lo hacemos sin peligro porque los términos proporcionales a ϵ están acotados. Son combinaciones de senos y cosenos. Muy distinto sería aproximar

$$\sin(\omega_0 t + \alpha\epsilon t) = \sin\omega_0 t + \alpha\epsilon t\cos\omega_0 t. \tag{37}$$

En este caso $\alpha\epsilon t$ siempre es una pequeña corrección relativa a $\omega_0 t$ dentro de la función seno, pero es una corrección arbitrariamente grande respecto del orden cero si se usa la expansión (37).

Sigamos con el cálculo. Usando repetidas veces la identidad

$$\sin a\cos b = \tfrac{1}{2}\Big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big], \tag{38}$$

podemos agrupar términos en (33) según las frecuencias:

$$q(\varphi, I) = \sqrt{\frac{2I}{m\omega_0}}\Big[\sin\varphi + \tfrac{3}{4}\epsilon m^2 I\omega_0\big(2\sin\varphi + \sin 3\varphi\big)\Big]. \tag{39}$$

La dependencia temporal viene a través de $\varphi(t, I) = \omega(I)t$. Escribiendo, $q = q_0 + \epsilon q_1$, la perturbación a la solución de orden cero sería

$$q_1(\varphi, I) = \tfrac{3}{4}m^2\omega_0 I\sqrt{\frac{2I}{m\omega_0}}\,\big(2\sin\varphi + \sin 3\varphi\big). \tag{40}$$

Un cálculo similar da

$$p(\varphi, I) = \sqrt{2m\omega_0 I}\,\Big[\cos\varphi + \tfrac{1}{4}\epsilon m^2 I\omega_0\big(-6\cos\varphi + \cos 3\varphi\big)\Big], \tag{41}$$

en donde leemos que

$$p_1(\varphi, I) = \tfrac{1}{4}m^2\omega_0 I\sqrt{2m\omega_0 I}\,\big(-6\cos\varphi + \cos 3\varphi\big). \tag{42}$$

Recordar que en todas estas ecuaciones $\varphi = \omega(I)t$, o, eventualmente, $\varphi = \omega(I)t + \varphi_0$.

Una verificación interesante consiste en calcular p a partir de la ecuación canónica $\dot{q} = \partial H/\partial p$. Si el hamiltoniano fuera del tipo $H = p^2/2m + V(q)$, eso sería $\dot{q} = p/m$. Pero en el ejemplo en cuestión el hamiltoniano tiene más términos que dependen de p. Así resulta, en cambio,

$$\dot{q} = \frac{p}{m} + 4\epsilon p^3. \tag{43}$$

Estamos interesados en despejar p en función de $\dot{q}$. Ya conocemos q, de modo que si pudiéramos escribir p como función de $\dot{q}$, estaríamos hechos. La ecuación anterior dice que p va a ser igual a $m\dot{q}$ más una corrección de orden ϵ,

$$p = m\dot{q} - 4\epsilon m p^3. \tag{44}$$

Hasta aquí no hemos aproximado nada. Tampoco habremos aproximado nada si reemplazamos esta identidad en sí misma, de manera recursiva:

$$p = m\dot{q} - 4m\epsilon\Big(m\dot{q} - 4\epsilon m p^3\Big)^3. \tag{45}$$

Pero, escrito en esta forma, no cuesta nada ver que a orden ϵ es

$$p = m\dot{q} - 4\epsilon m^4\dot{q}^3. \tag{46}$$

Más aún, en el término proporcional a ϵ podemos reemplazar q por la solución de orden cero.

$$p = m\dot{q} - 4\epsilon m^4\dot{q}_0^3. \tag{47}$$

Habiendo calculado $q(\varphi, I)$, el resultado para p se obtendría reemplazando $q(\varphi, I)$ en la ecuación anterior. El único (pero decisivo) cuidado que hay que tener es al calcular $\dot{q}$. Tenemos

$$\dot{q} = \dot{\varphi}\frac{\partial q}{\partial \varphi} = \omega \frac{\partial q}{\partial \varphi}. \tag{48}$$

Al reemplazar en la ec. (47), en el término lineal en $\dot{q}$ hay que conservar la corrección de orden ϵ en la frecuencia, ec. (29), y la corrección de orden ϵ en la propia función q. Eso no es necesario para el término cúbico en $\dot{q}$, pues ese término ya contiene un factor ϵ. Entonces:

$$\begin{aligned} p &= m\big(\omega_0 + \epsilon\omega_1\big)\left(\frac{\partial q_0}{\partial \varphi} + \epsilon \frac{\partial q_1}{\partial \varphi}\right) - 4\epsilon m^4 \omega_0^3 \left(\frac{\partial q_0}{\partial \varphi}\right)^3 \\ &= \sqrt{2m\omega_0 I}\,\cos\varphi + \epsilon\left[m\omega_0 \frac{\partial q_1}{\partial \varphi} + m\omega_1 \frac{\partial q_0}{\partial \varphi} - 4m^4\omega_0^3\left(\frac{\partial q_0}{\partial \varphi}\right)^3\right] \\ &= \sqrt{2m\omega_0 I}\left\{\cos\varphi + \epsilon\omega_0^2 m^2 I\,\left[\tfrac{3}{4}(2\cos\varphi + 3\cos 3\varphi) + 3\cos\varphi - 8\cos^3\varphi\right]\right\}. \end{aligned} \tag{49}$$

Reduciendo $\cos^3\varphi$,

$$\cos^3\varphi = \tfrac{3}{4}\cos\varphi + \tfrac{1}{4}\cos 3\varphi, \tag{50}$$

se obtiene de nuevo la expresión (41). Esta coincidencia es una de las cosas más parecidas a un milagro que verán el día de hoy.

Algunas integrales

En el ejemplo apareció la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\;\cos^4\theta. \tag{51}$$

Este tipo de integrales son en realidad muy fáciles. Si sólo se está interesado en calcular la integral definida en un período, entonces puede usarse el siguiente truco. Si el exponente es impar, la integral es cero. En otro caso escribimos $\cos^n\theta$ usando su expresión en términos de las exponenciales imaginarias y de la fórmula del binomio:

$$\cos^n\theta = \frac{1}{2^n}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{i(2k-n)\theta}. \tag{52}$$

El único término de la sumatoria que, integrado en entre 0 y 2π, no integra a cero es aquel que no depende de θ. Es decir, el que corresponde a $k = n/2$, que es constante. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\;\cos^n\theta = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{1}{2}n} = \frac{n!}{2^n[(n/2)!]^2} \tag{53}$$

Para $n = 4$, obtenemos

$$\frac{4!}{2^4(2!)^2} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}.$$

Pero frecuentemente también necesitaremos conocer la primitiva, no sólo la integral definida. En ese caso lo mejor es usar igualdades trigonométricas hasta reducir el integrando a una suma de términos simples. En el caso en cuestión, queda

$$\begin{aligned}\cos^4\theta &= \Big[\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\Big]^2 = \tfrac{1}{4}\Big(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\Big)\\ &= \tfrac{1}{4}\Big[1 + 2\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\Big] = \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta + \tfrac{1}{8}\cos 4\theta. \end{aligned} \tag{54}$$

Así, es trivial calcular tanto el promedio como la primitiva. En el primer caso, salvo el término constante, todos los otros promedian a cero.

Las identidades que se usan más a menudo son:

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x),\\ \sin^2 x &= \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x),\\[1em] \sin x \cos y &= \tfrac{1}{2}\big[\sin(x+y) + \sin(x-y)\big],\\ \cos x \cos y &= \tfrac{1}{2}\big[\cos(x-y) + \cos(x+y)\big],\\ \sin x \sin y &= \tfrac{1}{2}\big[\cos(x-y) - \cos(x+y)\big].\end{aligned}$$