

Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2017 (B)

Variables de ángulo-acción expuestas por primera vez a la vista del público*

Para ver mejor el significado de las variables de ángulo-acción vamos a estudiar un sistema unidimensional con el siguiente hamiltoniano:

$$H(x, p, \alpha) = p^2 + \frac{\alpha x^2 + |x|}{1 + \alpha}. \quad (1)$$

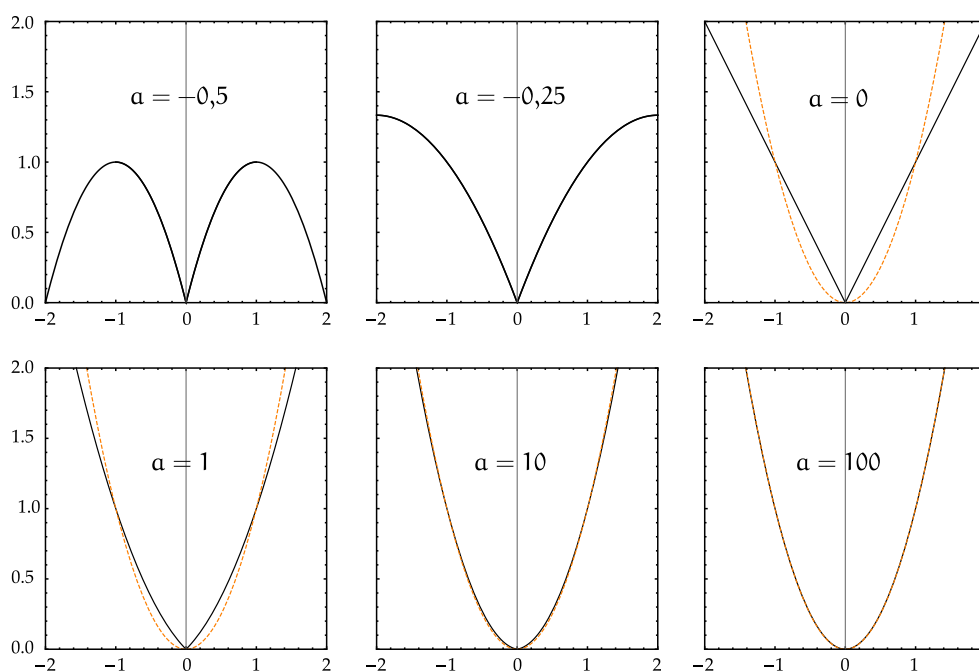
Aquí, además de las variables canónicas x y p hemos introducido un parámetro α que permite cambiar la forma del potencial,

$$V(x, \alpha) = \frac{\alpha x^2 + |x|}{1 + \alpha}. \quad (2)$$

Se trata de un potencial simétrico respecto de x . Para $\alpha \gg 1$, se aproxima al potencial de un oscilador armónico

$$V(x, \alpha) \rightarrow x^2. \quad (3)$$

Cuando $\alpha = 0$, el potencial es $V(x, 0) = |x|$. Cuando α pasa de positivo a negativo, la curvatura del potencial se invierte, y vuelve a invertirse para $\alpha < -1$. Nos limitaremos a valores de α mayores que $-1/2$. La figura muestra el aspecto típico del potencial en cada intervalo relevante. Para $\alpha \geq 0$, se muestra también el gráfico de la función x^2 .



Notar que siempre hay una región de libración. Cuando $-1/2 \leq \alpha < 0$ esa región está acotada entre los máximos del potencial,

$$|x| < -\frac{1}{2\alpha}. \quad (4)$$

*Ente contralor de escritos sobre Variables de Ángulo Acción zanellaj@df.uba.ar

Para $\alpha \geq 0$, $V(x, \alpha)$ globalmente tiene la forma de un pozo de potencial en todo el eje x , de manera que todo el espacio de fases consta de trayectorias cerradas de libración.

Lo importante aquí es que en todo el intervalo de variación de α que vamos a estudiar podemos definir variables de ángulo-acción (J, θ) . Es decir, una transformación

$$\begin{aligned}\theta &= \theta(x, p, \alpha), \\ J &= J(x, p, \alpha),\end{aligned}\tag{5}$$

en donde α cumple el rol de un parámetro. Más aún, el motivo de haber parametrizado el potencial según la ec. (2) es que al hacer $\alpha \gg 1$ nos iremos aproximando al archiconocido ejemplo del oscilador armónico.

El estado del sistema puede identificarse mediante una infinidad de coordenadas canónicas. Las coordenadas (x, p) corresponden al nivel más cercano a nuestros sentidos. En esencia, x es la posición de la partícula y p su velocidad. Para cada punto que identifiquemos mediante las coordenadas (x, p) podemos dar sus coordenadas en términos de las variables de ángulo-acción.

$$(x, p) \rightarrow (\theta, J).\tag{6}$$

Digresión: analogía con coordenadas curvilíneas en el plano xy

En el plano (x, p) el significado de las variables (θ, J) es completamente análogo al de coordenadas curvilíneas (u, v) para dar la posición de un punto en el plano (x, y) .

Existe todo un catálogo de sistemas de coordenadas curvilíneas, en el plano y en el espacio. Ciertos problemas se resuelven trivialmente cuando se usa un sistema en particular. Esto es válido tanto en Mecánica Clásica, como en Electromagnetismo como en Hidrodinámica, etc. El sistema más simple de coordenadas curvilíneas es el de las coordenadas polares (ρ, φ) .

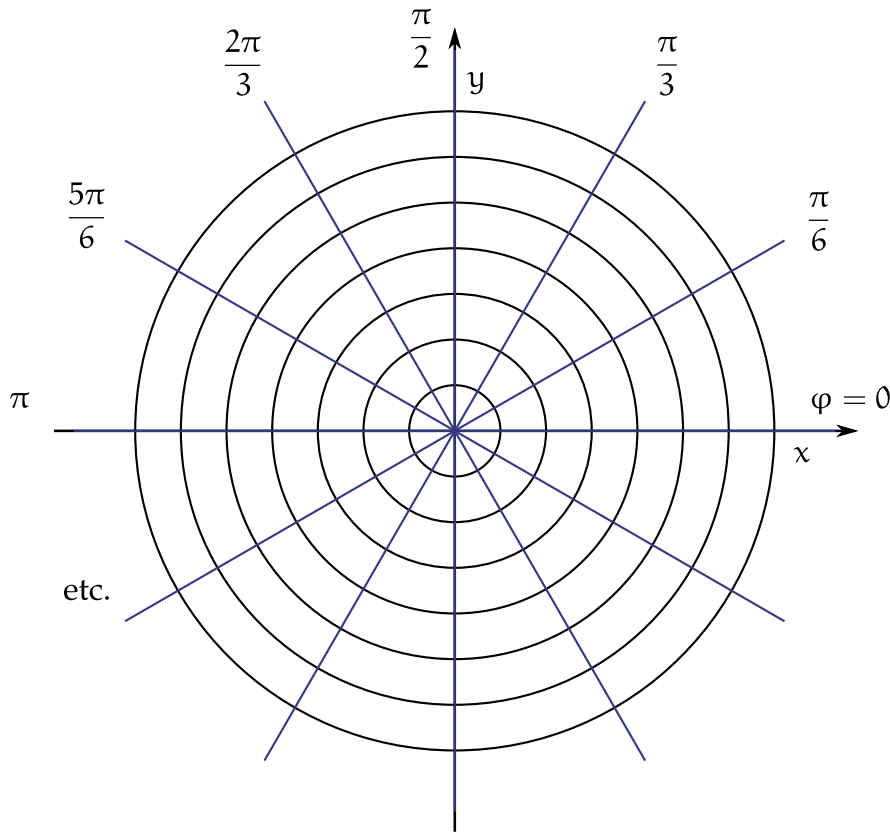
No todos estos sistemas usan un *ángulo* como alguna de sus coordenadas. Y aunque lo usen, una variable de tipo angular no es necesariamente el ángulo del vector posición respecto a un eje fijo. Más generalmente, una coordenada v asume la categoría de ángulo si la transformación que relaciona las coordenadas (x, y) con las coordenadas curvilíneas se escribe como

$$\begin{aligned}x(u, v) &= f_1(u, v), \\ y(u, v) &= f_2(u, v),\end{aligned}\tag{7}$$

donde las funciones f_i son periódicas de período 2π en la variable v . Por ejemplo, en el caso de las coordenadas polares usuales

$$\begin{aligned}x(\rho, \varphi) &= \rho \cos \varphi, \\ y(\rho, \varphi) &= \rho \sin \varphi,\end{aligned}\tag{8}$$

con $0 \leq \rho < \infty$ y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. La interpretación geométrica de la transformación es muy simple: consiste en llenar todo el plano (x, y) con círculos centrados en el origen. La coordenada ρ gobierna el radio de cada círculo. La coordenada φ se identifica sin duda con el ángulo que forma el radio vector con el eje x .



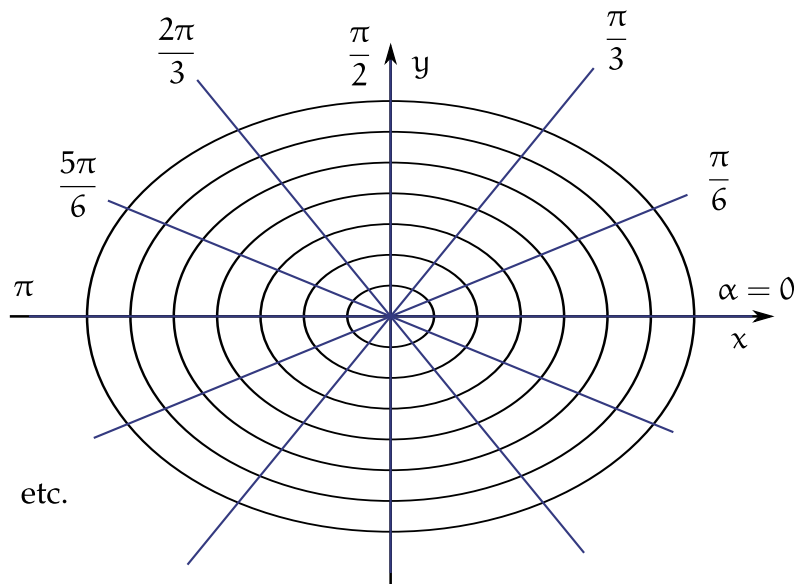
Una generalización trivial de las coordenadas polares consiste en tomar elipses de excentricidad fija en lugar de círculos, a través de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x(\rho, \varphi) &= a \rho \cos \alpha, \\ y(\rho, \varphi) &= b \rho \sin \alpha. \end{aligned} \tag{9}$$

Aquí las funciones de la transformación son periódicas, pero el ángulo α no es el ángulo que forma el vector posición con el eje x , como en el caso de las coordenadas polares usuales. En verdad

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \tan \alpha. \tag{10}$$

Las rectas a través del origen siguen siendo rectas de *ángulo* constante, pero el tal ángulo no es el ángulo medido respecto al eje x . La relación entre φ y α ni siquiera es lineal. Las curvas coordenadas en un sistema como este tienen la forma que muestra la figura.



Este sistema de coordenadas ni siquiera tiene un nombre, puesto que se reduce al sistema de coordenadas polares usuales mediante un simple rescaleo de las coordenadas x e y .

El sistema que se conoce con el nombre de sistema de coordenadas elípticas es fundamentalmente distinto del sistema de coordenadas polares, y es uno de los ejemplos más sencillos de coordenadas curvilíneas en donde la coordenada angular poco tiene que ver con la coordenada φ de polares. La transformación que define las coordenadas elípticas (u, v) es, a menos de un factor de escala que omitimos,

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \cosh u \cos v, \\ y(u, v) &= \sinh u \sin v. \end{aligned} \quad (11)$$

Si mantenemos fijo u y variamos v entre 0 y 2π el punto (x, y) completa una órbita cerrada que satisface la ecuación

$$\frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 u} = 1. \quad (12)$$

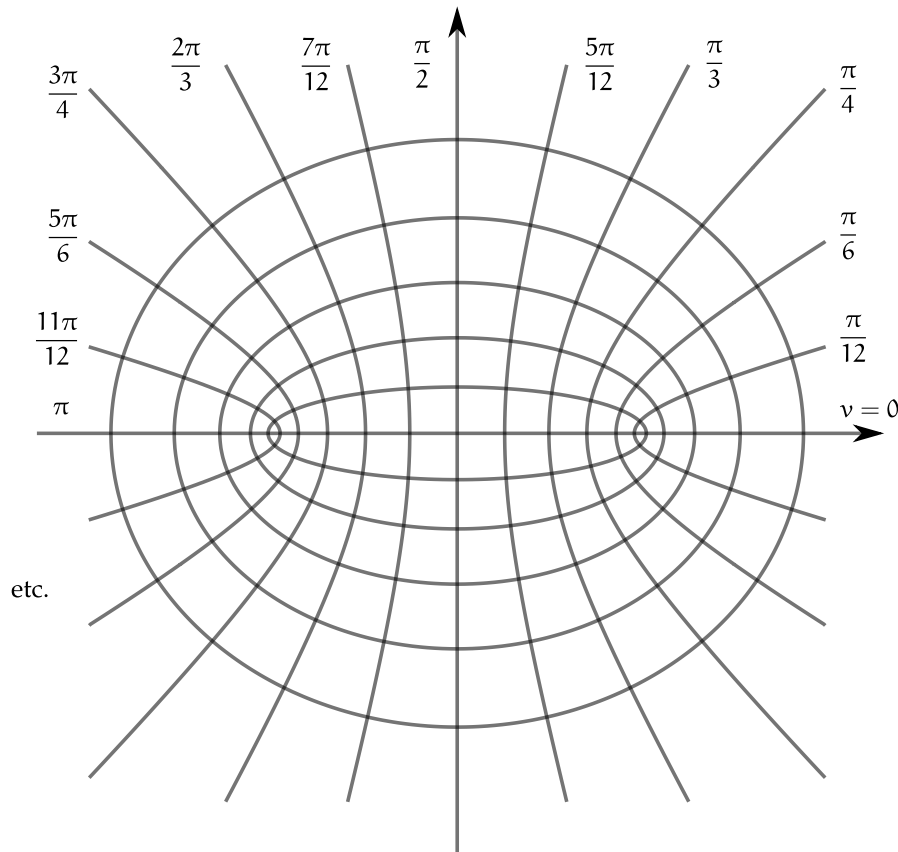
Es decir, las órbitas son elipses centradas en el origen, con el semieje mayor en la dirección del eje x y sus focos en $x_{\pm} = \pm 1$. Cuando $u \gg 1$, las órbitas se aproximan cada vez más a círculos centrados en el origen. En cambio, cuando $u \rightarrow 0$, las órbitas son elipses cada vez más excéntricas. En este sentido, es importante notar que todas las órbitas de u constante rodean a los puntos x_{\pm} , por más pequeño que sea u . Esto contrasta con el caso de las coordenadas polares, en donde las órbitas de ρ constante se reducen a un punto cuando ρ se aproxima a cero. Aquí se aproximan al segmento $(-1, 1)$ del eje x .

Las curvas coordenadas de ángulo v constante se definen por la ecuación

$$\frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = 1, \quad (13)$$

es decir, son hipérbolas. Lejos del origen se aproximan asintóticamente a las rectas de ángulo polar $\varphi = v$. En otras palabras, visto desde lejos del origen, este sistema de coordenadas se parece cada vez más al de las coordenadas polares usuales.

La figura siguiente muestra las curvas coordenadas en la región cercana al origen, donde la diferencia con las coordenadas polares es más notable.



La idea de todo esto es señalar que el ángulo φ de polares no es la única coordenada angular posible. Dependiendo del tipo de órbita que se quiera describir, ciertos sistemas de coordenadas resultarán más prácticos que otros. Pero, y esto es fundamental, todos estos sistemas de coordenadas conviven en forma pacífica en el plano (x, y) , independientemente de la dinámica del sistema cuyo estado especifican. El problema de una partícula que da vueltas en círculos alrededor del origen se describe mejor en coordenadas polares. El problema de un oscilador armónico bidimensional tal vez se describa más fácilmente en coordenadas cartesianas o elípticas. Pero nada impide estudiar al oscilador armónico en coordenadas polares o a la partícula en el círculo en coordenadas elípticas o cartesianas.

Insistimos: que la dinámica de un sistema induzca de manera natural la definición de ciertas coordenadas no impide que esas coordenadas sean luego aplicadas para describir otro sistema cualquiera. Ningún sistema dinámico tiene los derechos exclusivos sobre sus coordenadas naturales.

Esta idea es esencial en el caso de las variables de ángulo-acción y de la teoría canónica de las perturbaciones.

Uno tiende a pensar que las variables de ángulo-acción son propias de un sistema dinámico, y que para tratar cada sistema (salvo equivalencias triviales) sólo pueden usarse sus propias variables de ángulo-acción. Pero no. Eso sería como pensar que el sistema de coordenadas cartesianas sólo puede usarse para una partícula en un campo de fuerza constante, o que las coordenadas polares son exclusivas del problema de fuerzas centrales. Que un par de variables de ángulo-acción surja a través del estudio de un hamiltoniano en particular no impide que sean usadas como coordenadas canónicas en un problema con otro hamiltoniano. Lo único que debe pedirse es que ambos hamiltonianos tengan, cualitativamente hablando, el mismo tipo de órbitas. Así, las variables de ángulo-acción del problema de Kepler pueden ser utilizadas para describir un oscilador tridimensional; o las variables de ángulo-acción de un oscilador lineal pueden usarse para describir un oscilador no lineal.

Las variables de ángulo-acción no son otra cosa que un sistema de curvas coordenadas en el plano (x, p) . Cuando uno las piensa de ese modo dejan de ser entes abstractos. Al estudiar el formalismo de las transformaciones canónicas, es tentador renunciar desde el principio a todo intento de visualización. Se da por hecho que ahora las variables canónicas son meros símbolos intraducibles, con los que hay que lidiar sin comprender realmente su significado. Eso tal vez sea cierto en muchos casos, pero sin duda no lo es para las variables de ángulo-acción. La introducción de las variables de ángulo-acción es como un regreso de nuestros viejos conocidos ρ y φ de las coordenadas polares, sólo que un poco más curvilíneos que de costumbre.

De vuelta al problema original

El hamiltoniano (1) con su potencial (2),

$$H(x, p, \alpha) = p^2 + \frac{\alpha x^2 + |x|}{1 + \alpha}, \quad [1]$$

$$V(x, \alpha) = \frac{\alpha x^2 + |x|}{1 + \alpha}, \quad [2]$$

nos dan la oportunidad de ver toda una familia de coordenadas de ángulo-acción, aplicables a cualquier problema unidimensional con órbitas periódicas alrededor del origen. Las ecuaciones de transformación de las coordenadas (x, p) a las coordenadas de ángulo-acción pueden obtenerse analíticamente. Para cada valor del parámetro α tendremos funciones de transformación $J(x, p, \alpha)$ y $\theta(x, p, \alpha)$, válidas en la región de movimiento de libración. Esta región es todo el plano si $\alpha \geq 0$, de modo que en ese rango de valores de α no existen separatrices. En el intervalo $-1 < \alpha < 0$, hay regiones de movimiento periódico de libración y de movimiento no acotado. Para simplificar algunos signos, en este intervalo de valores de α usaremos $b = -\alpha$. La separatriz entre regiones con distinto tipo de órbitas

está definida por

$$p^2 - \frac{bx^2 + |x|}{1 - b} = V_{\max}(b) \tag{14}$$

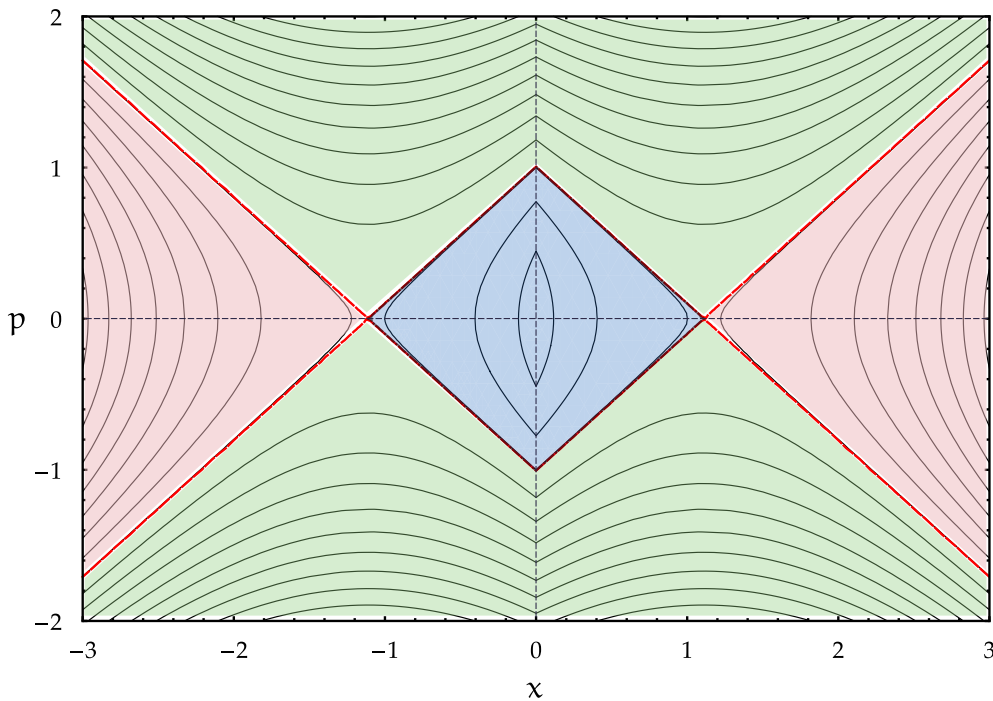
donde el valor máximo del potencial, que ocurre en $x = \pm 1/2b$, es

$$V_{\max}(b) = \frac{1}{4b(1 - b)}. \tag{15}$$

Cuando se reemplaza este valor en la ec. (14), quedan definidas varias rectas en el plano (x, p) , dadas por

$$p = \pm \frac{2b|x| + 1}{2\sqrt{b(1 - b)}}, \tag{16}$$

que no solo separan las regiones de libración de las de movimiento no acotado, sino las de movimiento no acotado con y sin punto de retorno, como muestra la siguiente figura.

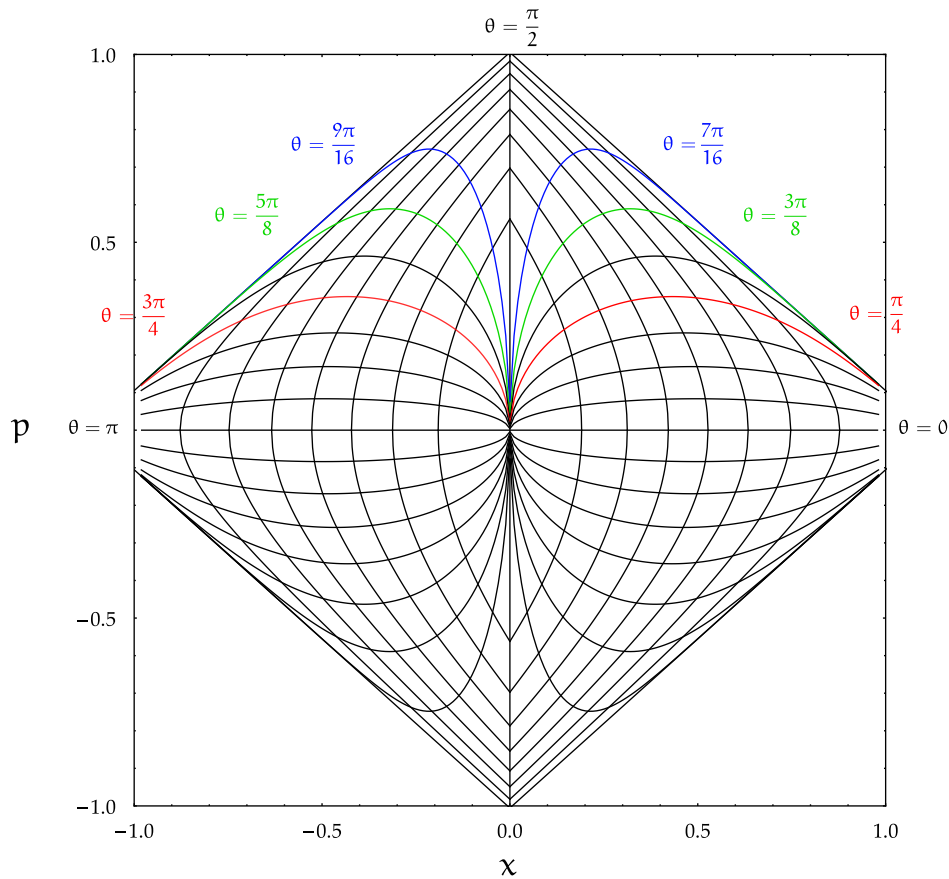


Retrato de fases para $\alpha = -0,45$. La región central es de libración. Arriba y abajo están las regiones de movimiento no acotado sin punto de retorno, y a derecha e izquierda las regiones de movimiento no acotado con un punto de retorno.

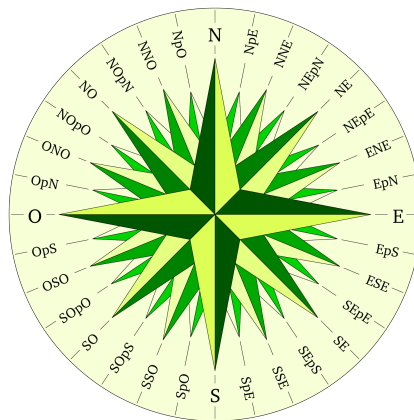
Aprovechamos para recordar, según hemos visto en clase, que potenciales con derivadas segundas continuas producen curvas separatrices que cortan a los ejes en ángulo oblicuo. En este caso, como el potencial es en esencia cuadrático, las separatrices son rectas.

Lo que sigue ahora es una serie de figuras que muestran, respectivamente, el potencial, el retrato de fases y las curvas coordenadas en las variables de ángulo-acción. Cada instancia corresponde a un valor particular de α , en sucesión creciente. Así puede verse la transición hacia los diagramas típicos del oscilador lineal unidimensional. En todos los

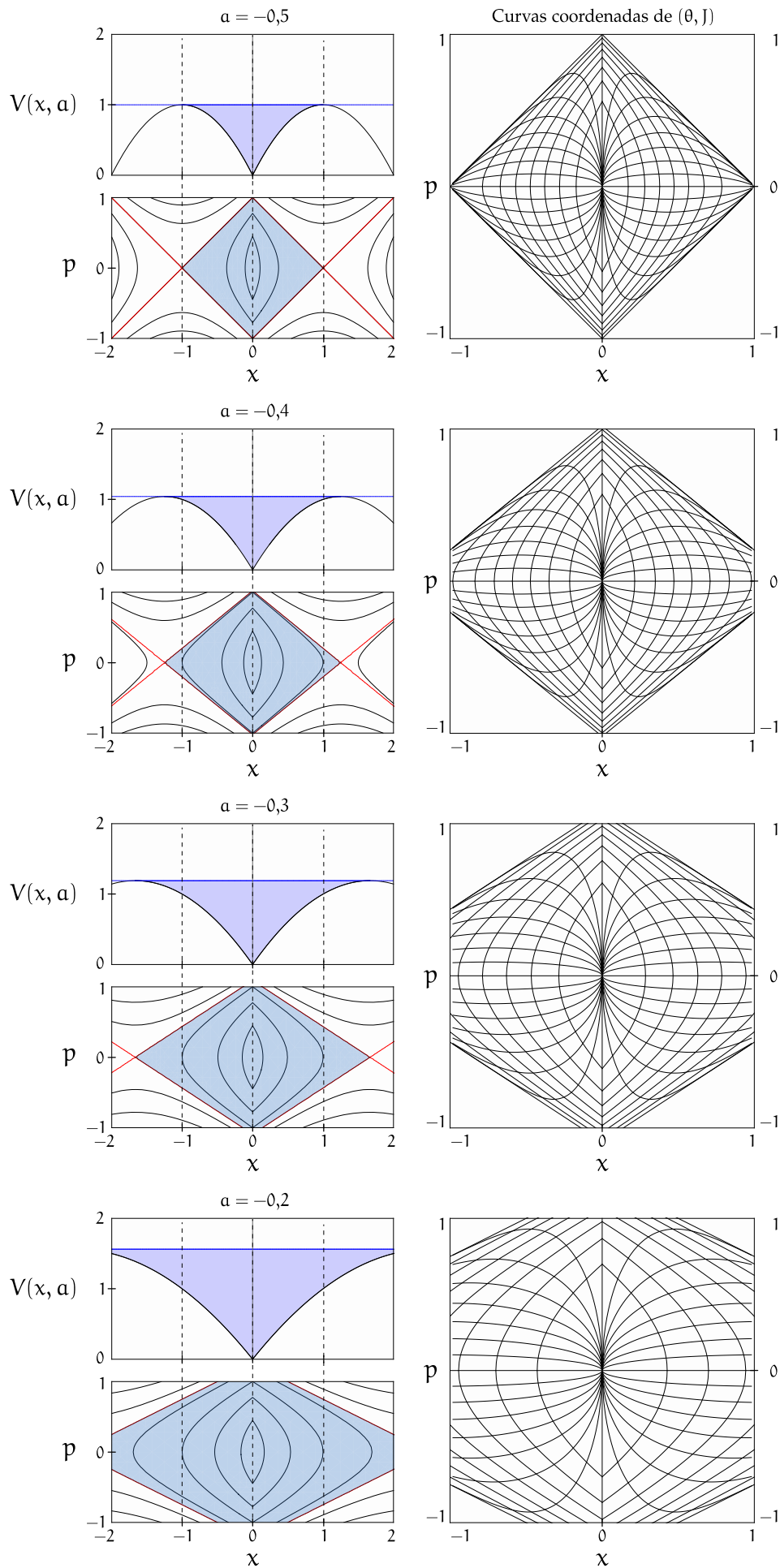
casos, las líneas de θ constante están graficadas para $\theta = 2n\pi/32$, con $n = 0, 1, \dots, 31$, como la rosa de los vientos. En la figura de abajo se señalan algunos valores de referencia.

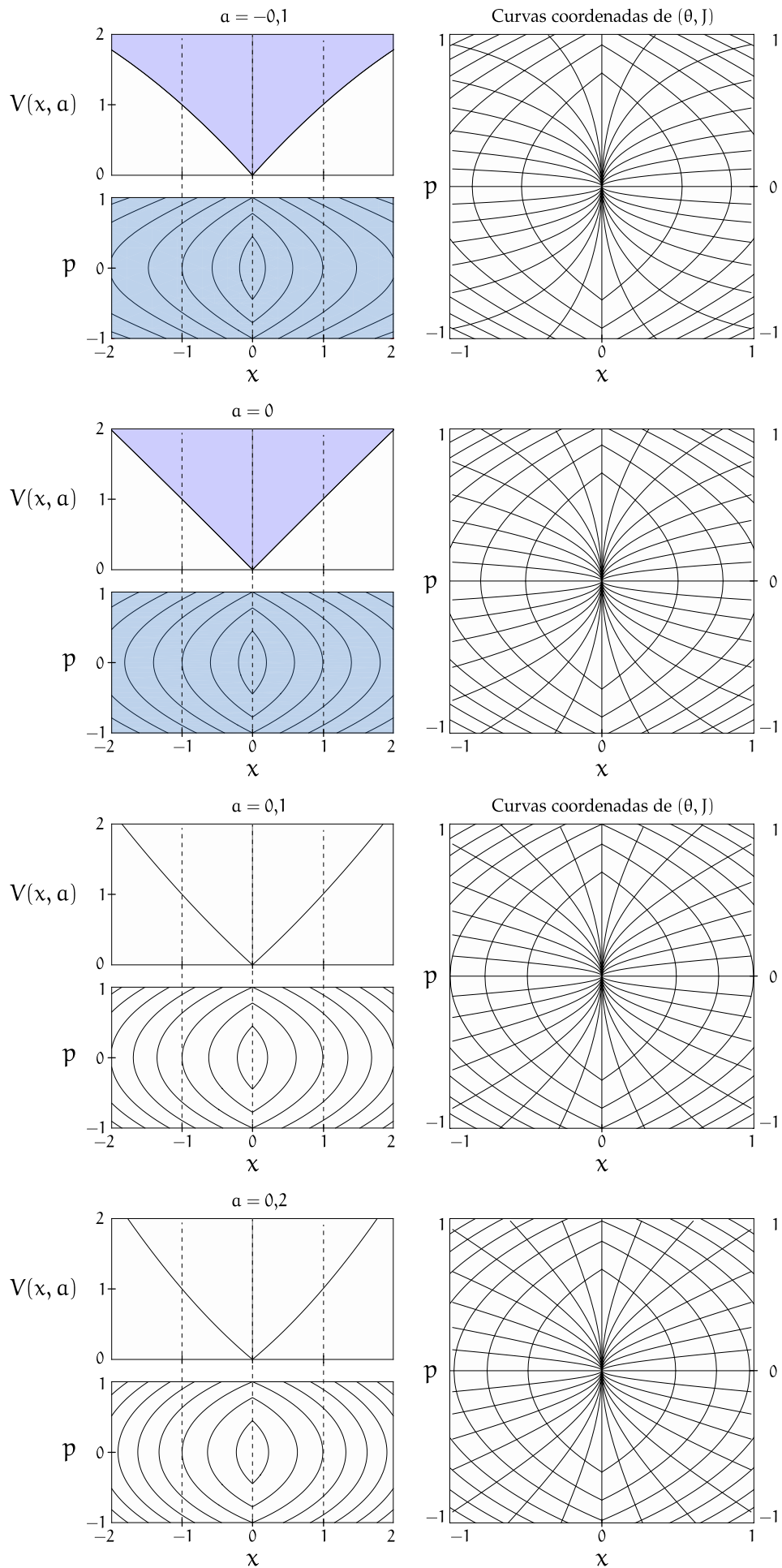


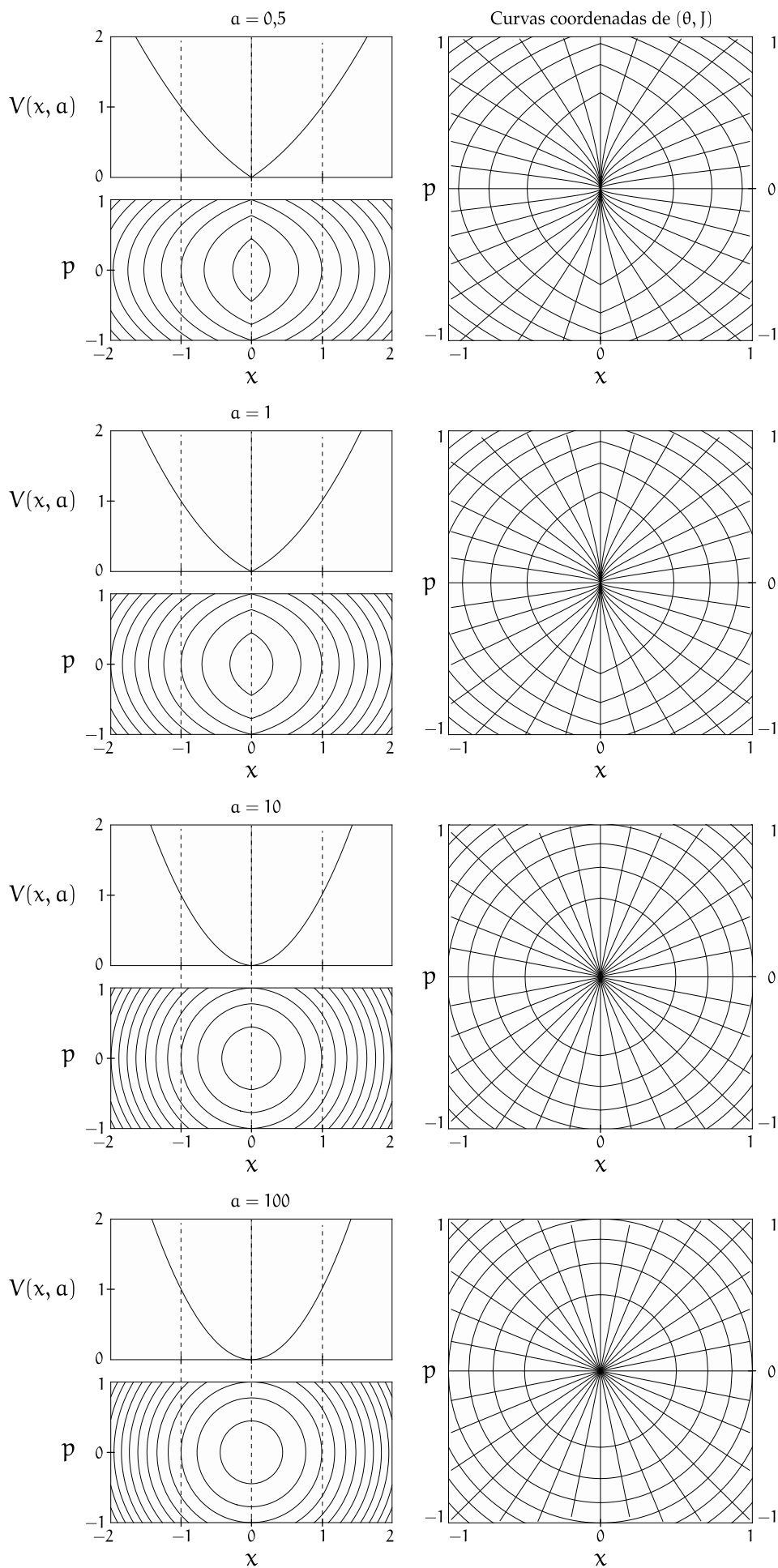
Las curvas de nivel de la variable de acción J están equiespaciadas, entre 0 y el valor máximo admisible dentro del intervalo $[-1, 1] \times [-1, 1]$ del plano (x, p) . Para $a < 0$ ese valor máximo corresponde a la órbita en la separatriz. Para $a \geq 0$ es simplemente el valor de J asociado a la energía en $(x, p) = (1, 1)$. Ya se nos acabó el espacio, así que la sucesión de figuras comienza a vuelta de hoja. Para justificar la página agregamos la figura de la rosa de los vientos. De todas formas, yo que ustedes miro la animación en video.[†]



[†]<https://youtu.be/97LsyxZ4OZ8>



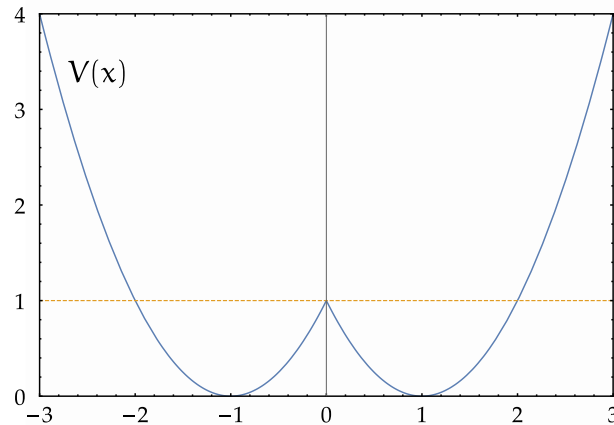




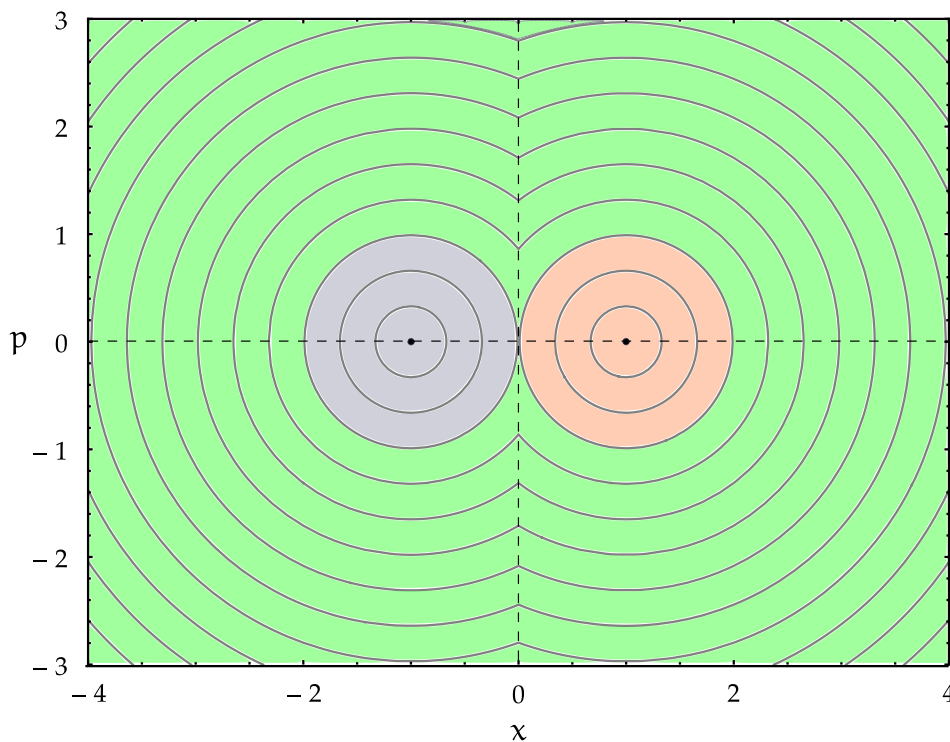
Bis

A propósito de las coordenadas elípticas de la figura de la página 5. En la Guía 7 hay un problema que tiene asociadas curvas coordenadas de (θ, J) muy parecidas. Son órbitas que rodean un doble pozo de potencial. Omitiendo constantes que pueden eliminarse por redefinición de las variables, el hamiltoniano es

$$H(x, p) = p^2 + V(x), \quad \text{con } V(x) = (|x| - 1)^2. \quad (17)$$



Para energías menores que el umbral $V(0) = 1$, la partícula sigue órbitas periódicas alrededor de alguno de los dos mínimos. Su movimiento es indistinguible del de un oscilador armónico. Pero para energías mayores que el umbral, la partícula recorre órbitas periódicas que van de un lado al otro del potencial. El retrato de fases se divide así en tres regiones invariantes.



En este problema las integrales son relativamente fáciles de hacer. Para $\mathcal{E} > V(0)$, que corresponde a las órbitas con forma de visión de binocular de las películas (a falta de otro término), la función característica de Hamilton es

$$W(x, \mathcal{E}) = \frac{1}{2} \left[(x-1)\sqrt{\mathcal{E} - (x-1)^2} + \mathcal{E} \sin^{-1} \left(\frac{x-1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \right) + \sqrt{\mathcal{E}-1} + \mathcal{E} \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \right) \right], \quad (18)$$

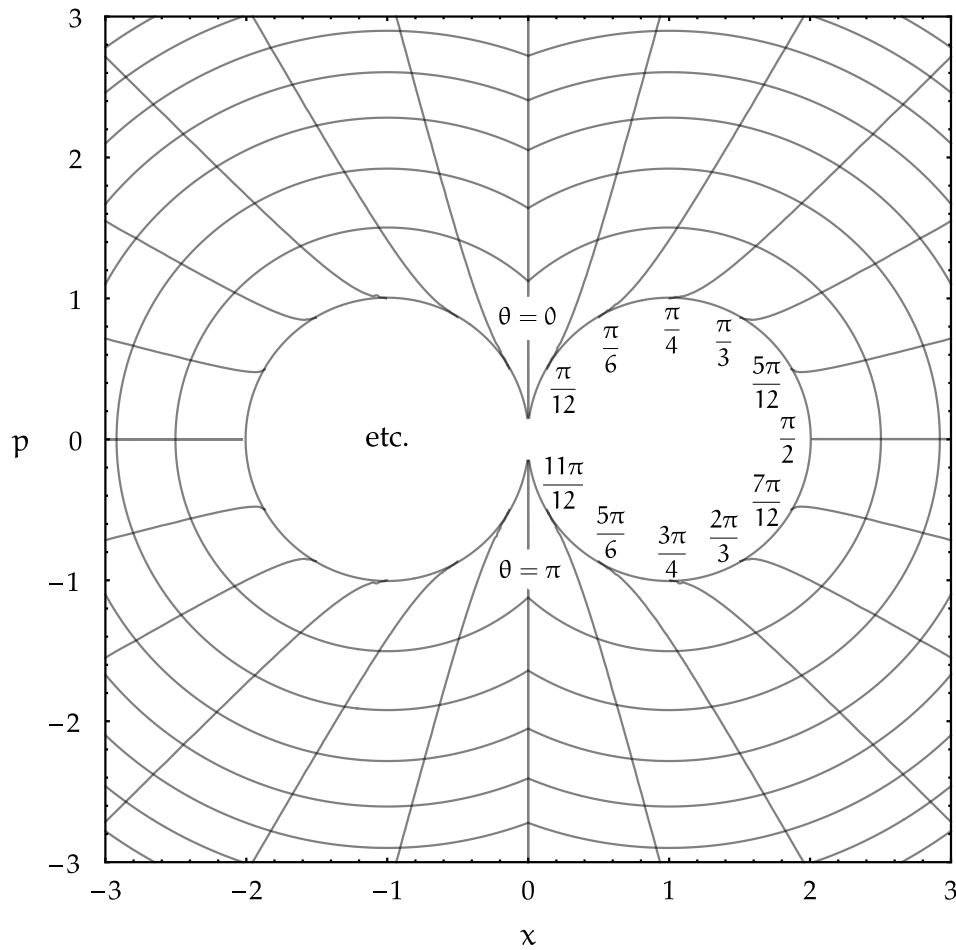
donde $\mathcal{E} = p^2 + V(x)$. Las variables de ángulo-acción son

$$\theta(x, \mathcal{E}) = \frac{\sin^{-1} \left(\frac{x-1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \right)}{1 + \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \right)}, \quad (19)$$

$$J(x, \mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{1}{\pi} \left[\sqrt{\mathcal{E}-1} + \mathcal{E} \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \right) \right]. \quad (20)$$

Debido a la presencia de las funciones trigonométricas inversas, las expresiones para W y θ son válidas en el cuadrante $[0, 1] \times [0, 1]$ del plano (x, p) . La extensión a los otros cuadrantes se realiza reemplazando x por $|x|$ y sumando las constantes adecuadas.

Lo interesante de este ejercicio son las curvas coordenadas de θ y J . En la región que estamos considerando esas curvas se muestran en la siguiente figura.



Comparar con las curvas del oscilador lineal y con las de las coordenadas elípticas.