El hamiltoniano en las variables p y x

$$H = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{m\,\omega 0^2}{2}\,x^2 + \epsilon\,p^4$$

$$H0 = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{m\,\omega 0^2}{2}\,x^2$$

$$H1 = p^4$$

Las transformaciónes AA para el oscilador lineal y el hamiltoniano H1 escrito en esas variables:

In[29]:= $x[\theta\_,\ J\_] := \sqrt{\frac{2\,J}{m\,\omega 0}}\ \mathrm{Sin}[\theta];$

$p[\theta\_,\ J\_] := \sqrt{2\,J\,m\,\omega 0}\ \mathrm{Cos}[\theta];$

$H1[\theta\_,\ J\_] := p[\theta,\ J]^4;$

Cálculo del valor medio de H1

In[32]:= $\mathrm{Integrate}\left[\frac{1}{2\,\pi}\,H1[\theta,\ i],\ \{\theta,\ 0,\ 2\,\pi\}\right]$

In[33]:= $\mathrm{H1medio}[i\_] := \frac{3}{2}\,i^2\,m^2\,\omega 0^2;$

Cálculo de la corrección a la frecuencia:

In[34]:= $D[\mathrm{H1medio}[i],\ i]$

In[16]:= $\omega[i\_] := \omega 0 + 3\,i\,m^2\,\epsilon\,\omega 0^2;$

Cálculo de la corrección a la transformación canónica que relaciona las variables AA de H0 a las de H1, llamadas aquí θ, J y ϕ, i, respectivamente

In[35]:= $\mathrm{Integrate}\left[\frac{1}{\omega 0}\,(\mathrm{H1medio}[i] - H1[\theta p,\ i]),\ \{\theta p,\ 0,\ \theta\}\right]$

In[36]:= $y1[\theta\_,\ i\_] := -\frac{1}{8}\,i^2\,m^2\,\omega 0\,(8\,\mathrm{Sin}[2\,\theta] + \mathrm{Sin}[4\,\theta]);$

Las ecuaciones de transformación entre las nuevas variables de AA y las antiguas

In[37]:=
```
Jota[ϕ_, i_] := i + ϵ Derivative[1, 0][y1][ϕ, i];
Theta[ϕ_, i_] := ϕ - ϵ Derivative[0, 1][y1][ϕ, i];
```

Expansión hasta orden ϵ de las variables originales x y p como funciones del tiempo

In[44]:=

$$\sqrt{\frac{2\,i}{m\,\omega 0}}$$

```
Collect[
  1/(Sqrt[2] Sqrt[i/(m ω0)])
   Normal[Series[x[Theta[ϕ, i], Jota[ϕ, i]],
     {ϵ, 0, 1}]], ϵ, Simplify]
```

$$\sqrt{2\,i\,m\,\omega 0}$$

```
Collect[
  1/Sqrt[2 i m ω0]
   Normal[Series[p[Theta[ϕ, i], Jota[ϕ, i]],
     {ϵ, 0, 1}]], ϵ, Simplify]
```

xϵ[ϕ_, i_, ϵ_] :=

$$\sqrt{2}\,\sqrt{\frac{i}{m\,\omega 0}}\left(\mathrm{Sin}[\phi]+\frac{3}{4}\,i\,m^2\,\epsilon\,\omega 0\,(3+2\,\mathrm{Cos}[2\,\phi])\,\mathrm{Sin}[\phi]\right);$$

pϵ[ϕ_, i_, ϵ_] :=

$$\sqrt{2}\,\sqrt{i\,m\,\omega 0}\left(\mathrm{Cos}[\phi]+\frac{1}{4}\,i\,m^2\,\epsilon\,\omega 0\,(-6\,\mathrm{Cos}[\phi]+\mathrm{Cos}[3\,\phi])\right);$$

Cálculo de las constantes i y ϕ0 a orden ϵ a partir de las condiciones iniciales (sería largo de explicar)

In[55]:=
```
Collect[
  Normal[Series[(m ω0^2)/2 xϵ[ϕ0, i, ϵ]^2 + 1/(2 m) pϵ[ϕ0, i, ϵ]^2,
    {ϵ, 0, 1}]], ϵ, Simplify]
```

Out[55]= $i\,\omega 0 - \frac{1}{2} i^2 m^2 \epsilon\, \omega 0^2 \left(4 \operatorname{Cos}[2 \phi 0] + \operatorname{Cos}[4 \phi 0]\right)$

In[60]:=
```
PowerExpand[
 Collect[
  Normal[Series[PowerExpand[ArcTan[m ω0 xϵ[ϕ0, i, ϵ]/pϵ[ϕ0, i, ϵ]]],
    {ϵ, 0, 1}]], ϵ, FullSimplify]]
```

Out[60]= $\phi 0 + i\, m^2 \epsilon\, \omega 0 \operatorname{Cos}[\phi 0] \left(4 + \operatorname{Cos}[2 \phi 0]\right) \operatorname{Sin}[\phi 0]$

In[93]:=
```
Phi0 = ArcTan[m ω0 x0/p0] + ϵ Phi1;
I0 = 1/ω0 ((m ω0^2)/2 x0^2 + 1/(2 m) p0^2) + ϵ I1;
```

In[101]:=
```
exp1 =
  Collect[
   Normal[
    Series[
     I0 ω0 - 1/2 I0^2 m^2 ϵ ω0^2 (4 Cos[2 Phi0] + Cos[4 Phi0]),
     {ϵ, 0, 1}]], ϵ, FullSimplify]
exp2 =
  Collect[
   TrigExpand[
    Collect[
     Normal[
      Series[Phi0 + I0 m^2 ϵ ω0 Cos[Phi0] (4 + Cos[2 Phi0])
         Sin[Phi0], {ϵ, 0, 1}]], ϵ, FullSimplify]],
   ϵ, FullSimplify]
```

Out[101]=

$$\frac{p0^2 + m^2\, x0^2\, \omega 0^2}{2\, m} + \frac{1}{8}\, \epsilon \left(-5\, p0^4 + 8\, I1\, \omega 0 + 6\, m^2\, p0^2\, x0^2\, \omega 0^2 + 3\, m^4\, x0^4\, \omega 0^4\right)$$

Out[102]=

$$\epsilon \left(\mathrm{Phi1} + \frac{1}{2}\, m^2\, p0\, x0\, \omega 0 \left(3 + \frac{2\, p0^2}{p0^2 + m^2\, x0^2\, \omega 0^2}\right)\right) + \mathrm{ArcTan}\left[\frac{m\, x0\, \omega 0}{p0}\right]$$

In[105]:=
```
sol =
  FullSimplify[
   Solve[{Coefficient[exp1, ϵ] == 0,
     Coefficient[exp2, ϵ] == 0}, {I1, Phi1}]][[1]]
```

Out[105]=

$$\left\{I1 \to \frac{5\, p0^4 - 6\, m^2\, p0^2\, x0^2\, \omega 0^2 - 3\, m^4\, x0^4\, \omega 0^4}{8\, \omega 0},\ \mathrm{Phi1} \to \frac{1}{2}\, m^2\, p0\, x0\, \omega 0 \left(-3 - \frac{2\, p0^2}{p0^2 + m^2\, x0^2\, \omega 0^2}\right)\right\}$$

Las condiciones iniciales para i y ϕ a partir de las condiciones iniciales para x y p, más la condición inicial para p si el dato es la velocidad v.

In[131]:=
$$\phi 0[x0\_,\ p0\_,\ \epsilon\_] := \mathrm{ArcTan}\left[m\,\omega 0\,\frac{x0}{p0}\right] + \epsilon\,\frac{1}{2}\,m^2\,p0\,x0\,\omega 0\left(-3 - \frac{2\,p0^2}{p0^2 + m^2\,x0^2\,\omega 0^2}\right);$$
$$i0[x0\_,\ p0\_,\ \epsilon\_] := \frac{1}{\omega 0}\left(\frac{m\,\omega 0^2}{2}\,x0^2 + \frac{1}{2\,m}\,p0^2\right) + \epsilon\,\frac{5\,p0^4 - 6\,m^2\,p0^2\,x0^2\,\omega 0^2 - 3\,m^4\,x0^4\,\omega 0^4}{8\,\omega 0};$$
$$P0[v\_,\ \epsilon\_] := m\,v - 4\,\epsilon\,m^4\,v^3;$$

Verifiaciones milagrosas:

In[129]:=
```
PowerExpand[
 FullSimplify[
  Collect[
   Normal[Series[xϵ[ϕ0[x0, p0, ϵ], i0[x0, p0, ϵ], ϵ],
     {ϵ, 0, 1}]], ϵ, TrigExpand],
  {x0 > 0, ω0 > 0, p0 > 0, m > 0}]]
```

Out[129]= x0

In[130]:=
```
PowerExpand[
 FullSimplify[
  Collect[
   Normal[Series[pϵ[ϕ0[x0, p0, ϵ], i0[x0, p0, ϵ], ϵ],
     {ϵ, 0, 1}]], ϵ, TrigExpand],
  {x0 > 0, ω0 > 0, p0 > 0, m > 0}]]
```

Out[130]= p0

A otra cosa

In[134]:=
```
ω0 = m = 1;
```

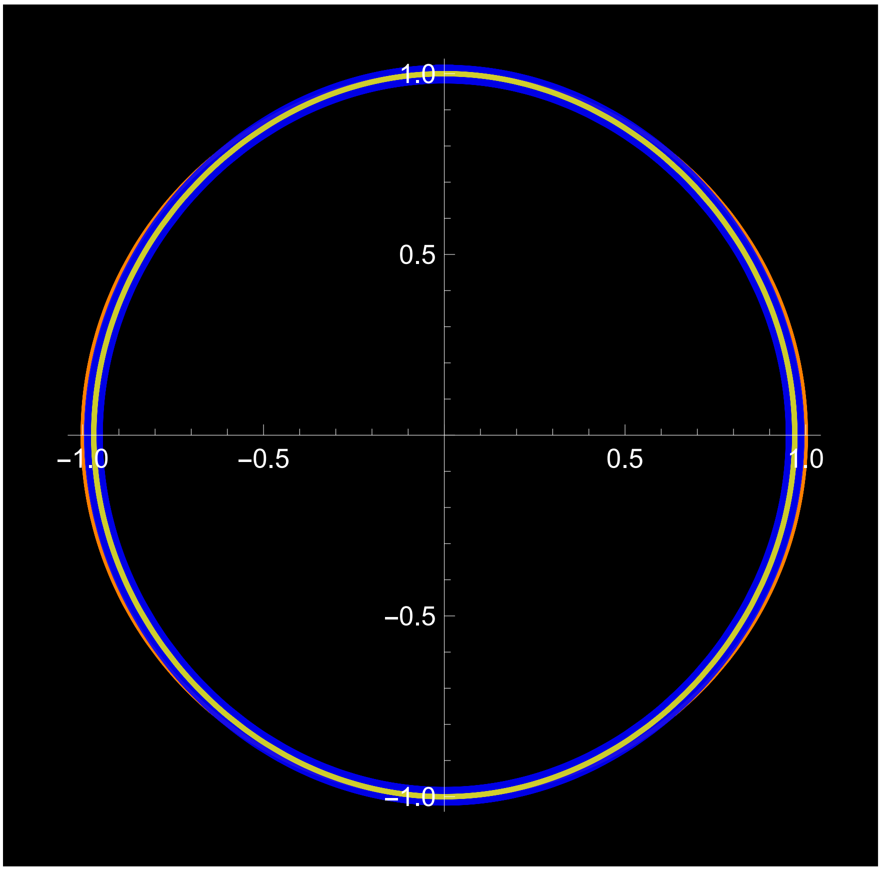
Comparación de las soluciones a orden ϵ con el resultado de integrar las ecuaciones canónicas numéricamente y con la órbita no perturbada del oscilador lineal unidimensional.

In[1741]:=
```
x0 = 0;
v0 = 1;
```

```
ϵpr = Rationalize[-0.03];
(* ϵ es una cantidad negativa,
para conservar el significado físico del hamiltoniano
 dado en el problema*)
ωpr = ω0 + 3 i0[x0, p0, 0] m^2 ϵpr ω0^2 ;

p0v = P0[v0, ϵpr];
p0 = 1;  (* Si se elige p0 igual a un número,
se comparan trayectorias con la misma condición
  inicial en el impulso. Si elige p0 = p0v,
se comparan trayectorias con la misma condición
 inicial en la velocidad*)

Phi0 = ϕ0[x0, p0, ϵpr];
I0 = i0[x0, p0, ϵpr];

Module[{x, p, t},
  sol =
   NDSolve[{x'[t] == p[t] + 4 ϵpr p[t]^3, p'[t] == - x[t],
      x[0] == x0, p[0] == p0}, {x, p},
     {t, 0, 10 × 2 π/ωpr}][[1]]];
xsol = sol[[1]][[2]];
psol = sol[[2]][[2]];

g1 = ParametricPlot[
  {xϵ[ω0 t + ϕ0[x0, p0, 0], i0[x0, p0, 0], 0],
   pϵ[ω0 t + ϕ0[x0, p0, 0], i0[x0, p0, 0], 0]},
  {t, 0, 2 π/ω0}, AspectRatio → Automatic,
  PlotStyle → Orange];
(* Naranja: órbita para el oscilador lineal sin
  perturbar*)

g2 = ParametricPlot[
  {xϵ[ωpr t + Phi0, I0, ϵpr], pϵ[ωpr t + Phi0, I0, ϵpr]},
  {t, 0, 2 π/ωpr}, AspectRatio → Automatic,
```

```
  PlotStyle → {Opacity[0.9], AbsoluteThickness[7],
    Blue}]; (*Azul: solución a orden ϵ*)

g3 = ParametricPlot[{xsol[t], psol[t]}, {t, 0, 2 2π/ωpr},
  AspectRatio → Automatic,
  PlotStyle → {Yellow, Opacity[0.8],
    AbsoluteThickness[2]}];
(*Amarello: solución numérica de las ecs. completas*)

Show[g1, g2, g3, PlotRange → All,
 AspectRatio → Automatic, Background → Black,
 ImageSize → 288, AxesStyle → White, ImageMargins → 20]
```

Out[1750]=

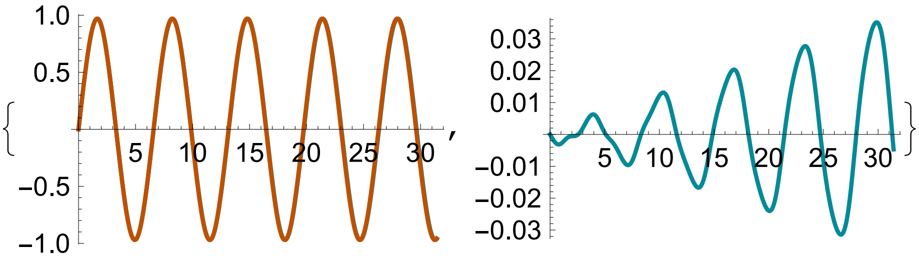


Comparación fina entre las solución numérica y la perturbativa: izq. las dos funciones en el mismo gráfico, der., su diferencia.

Posición:

In[1755]:=
```
Show[#, ImageSize → 160] & /@
 {Plot[{xsol[t], xϵ[ωpr t + Phi0, I0, ϵpr]} ,
   {t, 0, 10 π}],
  Plot[{xsol[t] - xϵ[ωpr t + Phi0, I0, ϵpr]} ,
   {t, 0, 10 π}]}
```

Out[1755]=



Impulso:

In[1754]:=
```
Show[#, ImageSize → 160] & /@
 {Plot[{psol[t], pϵ[ωpr t + Phi0, I0, ϵpr]} ,
   {t, 0, 10 π}],
  Plot[{psol[t] - pϵ[ωpr t + Phi0, I0, ϵpr]} ,
   {t, 0, 10 π}]}
```

Out[1754]=