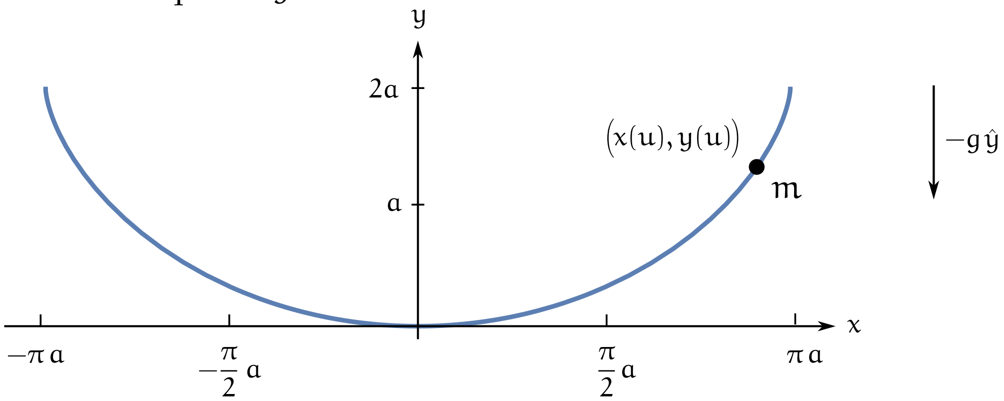
Mecánica Clásica (B) – 2do. cuatrimestre de 2017

Segundo parcial – 30/11

1. Una partícula de masa m está restringida a moverse en el plano vertical a lo largo de la curva definida paramétricamente por las ecuaciones:

$$x(u) = (u + \sin u)a, \qquad y(u) = (1 - \cos u)a,$$

con $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$, y a una constante positiva. Hay gravedad. La energía inicial de la partícula es menor que $2mga$.



a) Usando u como coordenada, escriba el lagrangiano $L(u, \dot{u})$ y el hamiltoniano $H(u, p_u)$. (Aplique lo antes posible las dos primeras identidades trigonométricas provistas).

b) Encuentre la función característica $W(u, \mathcal{E})$ para la ecuación de Hamilton-Jacobi.

c) Encuentre las variables de ángulo acción $J(\mathcal{E})$ y $\theta(u, \mathcal{E})$.

d) Calcule la frecuencia $\omega(\mathcal{E})$ como función de la energía. (La respuesta lo sorprenderá).

2. Dado el primer par de transformaciones para un sistema de dos grados de libertad,

$$Q_1 = q_1^2, \qquad Q_2 = q_1 + q_2. \tag{1}$$

a) Suponiendo una función generatriz de tipo F_2 independiente del tiempo. ¿Qué par de ecuaciones diferenciales debe satisfacer para ser compatible con las relaciones (1)?

b) Integre las ecuaciones y encuentre la familia de funciones generatrices $F_2(q_1, q_2, P_1, P_2)$ más general compatible con las ecuaciones (1).

c) Para esa familia de funciones, dar las ecuaciones de transformación de los impulsos,

$$P_i = P_i(q_1, q_2, p_1, p_2).$$

d) Dado un sistema cuyo hamiltoniano es

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1}\right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2,$$

elija una de las F_2 dentro de la familia de funciones posibles, de modo que Q_1 y Q_2 sean cíclicas respecto del nuevo hamiltoniano H'. Escriba H' explícitamente.

3. Al hamiltoniano de un oscilador lineal se le agrega un término proporcional a qp,

$$H(q, p) = \frac{1}{2}\big(p^2 + \epsilon qp + q^2\big),$$

donde $0 \leqslant \epsilon < 2$ es una constante.

a) Escriba una transformación canónica $Q(q, p)$ y $P(q, p)$ que sea una rotación de ángulo λ en el plano qp. (Sólo se piden las ecs. de transformación, no la función generatriz).

b) Elija λ para que el nuevo hamiltoniano de las variables Q y P tenga la forma

$$H'(Q, P) = aP^2 + bQ^2.$$

Escriba H' explícitamente.

c) ¿Cuál es la frecuencia con que evolucionan las variables Q y P? ¿Y las variables q y p?

d) Tomando como hamiltoniano sin perturbar $H_0(q, p) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$, verificar que el resultado anterior para la frecuencia es consistente con la frecuencia que se obtiene aplicando el método canónico de perturbaciones hasta primer orden en ϵ. (Casi no requiere cuentas).

Fórmulas gratis:

$$\sin^2 \tfrac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2},$$

$$\cos^2 \tfrac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2},$$

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x,$$

$$\int dx\, \sqrt{1 - x^2} = \tfrac{1}{2}\Big[x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\Big],$$

$$dF_2 = p_i dq_i + Q_i dP_i + (H' - H)dt.$$

$$\text{rotación 2D} \begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' = y \cos \varphi - x \sin \varphi. \end{cases}$$

Problemas en hojas separadas escritas por una sola carilla. Pase en limpio los cálculos principales, el resto puede entregarse como borrador. Escriba lo mínimo indispensable.