Mecánica Clásica (B) – 2do. cuatrimestre de 2017

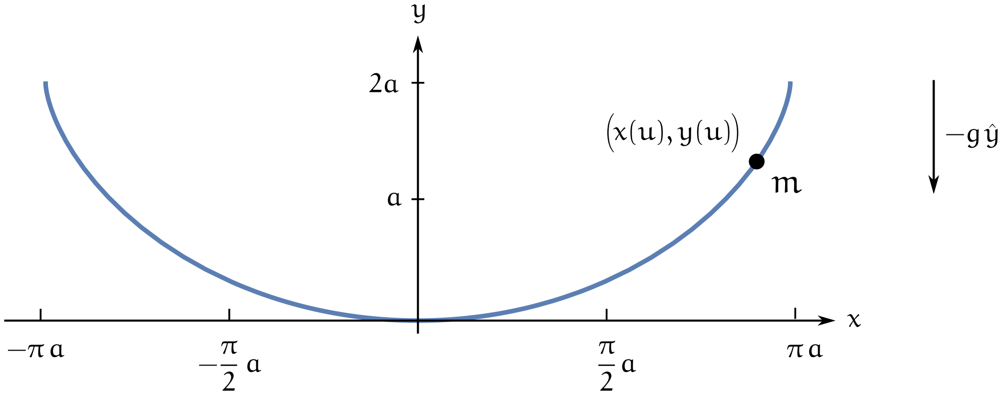
Segundo parcial (con las soluciones)[*†]

■ Problema 1

Una partícula de masa m está restringida a moverse en el plano vertical a lo largo de la curva definida paramétricamente por las ecuaciones:

$$x(u) = (u + \sin u)a, \qquad y(u) = (1 - \cos u)a,$$

con $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$, y a una constante positiva. Hay gravedad. La energía inicial de la partícula es menor que $2mga$.



a) Usando u como coordenada, escriba el lagrangiano $L(u, \dot{u})$ y el hamiltoniano $H(u, p_u)$. (Aplique lo antes posible las dos primeras identidades trigonométricas provistas).

b) Encuentre la función característica $W(u, \mathcal{E})$ para la ecuación de Hamilton-Jacobi.

c) Encuentre las variables de ángulo-acción $J(\mathcal{E})$ y $\theta(u, \mathcal{E})$.

d) Calcule la frecuencia $\omega(\mathcal{E})$ como función de la energía. (La respuesta lo sorprenderá).

■ **Solución**. La posición de la partícula, su velocidad, energía cinética y energía potencial:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(u) &= (u + \sin u)a\,\hat{x} + (1 - \cos u)a\,\hat{y}, \\
\dot{\mathbf{r}}(u, \dot{u}) &= \big[(1 + \cos u)a\,\hat{x} + a \sin u\,\hat{y}\big]\dot{u}, \\
T(u, \dot{u}) &= \tfrac{1}{2}ma^2\big(1 + \cos^2 u + 2\cos u + \sin^2 u\big)\dot{u}^2 = \tfrac{1}{2}\left(4ma^2 \cos^2 \tfrac{u}{2}\right)\dot{u}^2, \\
V(u) &= mga(1 - \cos u) = 2mga \sin^2 \tfrac{u}{2}.
\end{aligned} \tag{1}$$

---

[*]Contenido mínimo de excipientes: 66 %

[†]Teléfono: zanellaj@df.uba.ar

Su lagrangiano y hamiltoniano:

$$L(u,\dot{u}) = T - V = \tfrac{1}{2}\left(4ma^2\cos^2\tfrac{u}{2}\right)\dot{u}^2 - 2mga\sin^2\tfrac{u}{2},$$

$$H(u,p_u) = T + V = \frac{p_u^2}{8ma^2\cos^2\frac{u}{2}} + 2mga\sin^2\tfrac{u}{2}. \tag{2}$$

El movimiento ocurre entre los puntos de retorno $\pm u_\mathcal{E}$, donde $u_\mathcal{E}$ es la raíz positiva de la ecuación

$$\mathcal{E} = 2mga\sin^2\tfrac{u_\mathcal{E}}{2}. \tag{3}$$

■ La función característica es

$$\begin{aligned} W(u,\mathcal{E}) &= \pm\int_{u_\mathcal{E}}^{u} du' \left[8ma^2\cos^2\tfrac{u'}{2}\left(\mathcal{E} - 2mga\sin^2\tfrac{u'}{2}\right)\right]^{1/2} \\ &= \pm 2a\sqrt{2m\mathcal{E}}\int_{u_\mathcal{E}}^{u} du' \left(1 - \frac{2mga}{\mathcal{E}}\sin^2\tfrac{u'}{2}\right)^{1/2}\cos\tfrac{u'}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

La última integral se calcula mediante la sustitución

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{max}}{\mathcal{E}}}\,\sin\tfrac{u}{2}, \tag{5}$$

donde $\mathcal{E}_{max}$ es el valor máximo admisible para la energía,

$$\mathcal{E}_{max} = 2mga. \tag{6}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} W(u,\mathcal{E}) &= \pm 4\mathcal{E}\sqrt{\frac{a}{g}}\int_1^{v} dv'\,\sqrt{1-v'^2} \\ &= \pm 4\mathcal{E}\sqrt{\frac{a}{g}} \times \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-v^2}\,v + \arcsin v - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \pm 2\mathcal{E}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\left(1 - \frac{\mathcal{E}_{max}}{\mathcal{E}}\sin^2\tfrac{u}{2}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{\mathcal{E}_{max}}{\mathcal{E}}}\sin\tfrac{u}{2} + \arcsin\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_{max}}{\mathcal{E}}}\sin\tfrac{u}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

El signo "+" corresponde a la rama con $p_u > 0$, y viceversa. En general, convendremos en que el signo superior (sea lo que fuere) esté asociado al tramo de la trayectoria con $p_u > 0$. Además, hemos elegido el punto de retorno $u_\mathcal{E}$ como extremo inferior de la integral. Por lo tanto, la acción es

$$J(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\pi} \times 2\left|W(-u_\mathcal{E},\mathcal{E})\right| = 2\mathcal{E}\sqrt{\frac{a}{g}}. \tag{8}$$

Definiendo la constante

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}, \tag{9}$$

resulta

$$J(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}}{\omega}. \tag{10}$$

Inmediatamente se ve que la frecuencia del movimiento es ω, independiente de la energía.

■ Nota al pie: una verificación sencilla es calcular la frecuencia en la aproximación de pequeñas oscilaciones. El resultado no debería diferir del de la ec. (9). Para $|u| \ll 1$, podemos usar

$$\cos\tfrac{u}{2} = 1 + \mathcal{O}(u^2), \qquad \sin\tfrac{u}{2} = \tfrac{u}{2} + \mathcal{O}(u^3). \tag{11}$$

Luego, para u próximo a cero el hamiltoniano (2) toma la forma aproximada

$$H \simeq \frac{p^2}{8ma^2} + 2mga\left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{4ma^2} + mgau^2\right), \tag{12}$$

que es el hamiltoniano de un oscilador lineal, cuya frecuencia viene dada por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{4ma^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}, \tag{13}$$

que coincide con (9). Lo interesante es que la frecuencia de las pequeñas oscilaciones es en verdad válida para todo el rango de amplitudes. La curva sobre la cual se mueve la partícula es una cicloide. Debido a esta independencia de la frecuencia con la amplitud se dice que es una curva tautócrona.

■ Para calcular la variable de ángulo, notemos primero que, como función de u y J, la función generatriz de la transformación a las variables de ángulo-acción es

$$W(u, J) = \pm J\left[\left(1 - \frac{J_{max}}{J}\sin^2\tfrac{u}{2}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{J_{max}}{J}}\sin\tfrac{u}{2} + \arcsin\left(\sqrt{\frac{J_{max}}{J}}\sin\tfrac{u}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right], \tag{14}$$

donde J_{max} es el máximo valor posible de la acción, correspondiente al máximo valor de la energía,

$$J_{max} = 8m\omega a^2. \tag{15}$$

A partir de aquí resulta

$$\theta(u, J) = \frac{\partial W(u, J)}{\partial J} = \mp\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sqrt{\frac{J_{max}}{J}}\sin\tfrac{u}{2}\right)\right]. \tag{16}$$

Escrita como función de $\mathcal{E}$ en lugar de J, queda

$$\theta(u,\mathcal{E}) = \mp\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_{max}}{\mathcal{E}}}\sin\tfrac{u}{2}\right)\right]. \tag{17}$$

Notar en las dos fórmulas anteriores que el orden de los signos delante del corchete ha cambiado respecto a la ec. (14). El cambio responde sólo a cuestiones de capricho profesional: puesto que el valor máximo del arcoseno es $\pi/2$, la expresión dentro del corchete es siempre mayor o igual que cero.

Recordemos que, según nuestra convención, el signo "$-$" en la ec. (17) está asociado a la rama con $p_u > 0$. Así, en el extremo $u_{\mathcal{E}}$ de la trayectoria es $\theta = 0$, y en el extremo contrario es $\theta = \mp\pi$. Si la partícula parte del punto de retorno $-u_{\mathcal{E}}$, sobre el tramo de la trayectoria con $p_u > 0$ el ángulo θ crece entre $-\pi$ y 0, y sobre el tramo con $p_u < 0$, a medida que la partícula regresa al punto de partida, θ aumenta entre 0 y π. En total, el periplo tiene un $\Delta\theta = 2\pi$.

■ Como nota práctica, aplicable a muchos de estos problemas y que ahorra bastante tiempo y posibilidades de error. Para calcular la variable de ángulo, no ha sido necesario derivar todos los términos que aparecen en la ec. (14). Tenemos que derivar el producto

$$W = J \times \Big[\text{the horror}\Big], \tag{18}$$

donde el corchete tiene un aspecto intimidante. Aplicando la regla del producto y notando que la expresión entre corchetes es W/J (esta insignificancia es poderosa), obtenemos

$$\frac{\partial W(u,J)}{\partial J} = \Big[\text{the horror}\Big] + J\frac{\partial}{\partial J}\Big[\text{the horror}\Big] = \frac{W}{J} + J\frac{\partial}{\partial J}\Big[\text{the horror}\Big]. \tag{19}$$

Ahora bien: la expresión entre corchetes en la ec. (14) puede abreviarse como

$$\left[\sqrt{1-v^2}\,v + \arcsin v - \frac{\pi}{2}\right], \tag{20}$$

donde

$$v = \sqrt{\frac{J_{max}}{J}}\sin\tfrac{u}{2}. \tag{21}$$

Pero la expresión (20), salvo un factor $\frac{1}{2}$, no es otra cosa que el resultado que obtuvimos al hacer la integral

$$\int_1^v dv'\,\sqrt{1-v'^2} = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{1-v^2}\,v + \arcsin v - \frac{\pi}{2}\right], \tag{22}$$

como paso intermedio en la ec. (7). Esto pone de manifiesto que derivar el término entre corchetes se reduce casi a invertir la integral de la cual es resultado:

$$\frac{\partial}{\partial J}\left[\sqrt{1-\nu^2}\,\nu+\arcsin\nu-\frac{\pi}{2}\right]=2\sqrt{1-\nu^2}\,\frac{\partial\nu}{\partial J}=-\frac{\nu}{J}\sqrt{1-\nu^2}. \tag{23}$$

El paso extra que tuvimos que incluir en la fórmula anterior es la derivada de ν respecto de J, pero eso no da ningún problema. Finalmente, la abominación ha sido arrojada a otra dimensión:

$$\frac{\partial W(u,J)}{\partial J}=\frac{W}{J}-\nu\sqrt{1-\nu^2}=\pm\left(\arcsin\nu-\frac{\pi}{2}\right). \tag{24}$$

■ *Post scriptum*: El hecho de que la frecuencia sea independiente de la amplitud sugiere una relación no tan lejana entre este sistema y un oscilador lineal. Entrecerrando los ojos, haciendo foco a unos 20 cm detrás de la pantalla del monitor o de la hoja impresa, a poco que uno mire el lagrangiano

$$L(u,\dot u)=T-V=\tfrac{1}{2}\left(4ma^2\cos^2\tfrac{u}{2}\right)\dot u^2-2mga\sin^2\tfrac{u}{2},$$

se hace visible lo siguiente:

$$\dot u\cos\frac{u}{2}=2\frac{d}{dt}\left(\sin\frac{u}{2}\right). \tag{25}$$

Si en lugar de u se eligiese $q=\sin\frac{u}{2}$ como coordenada generalizada, el lagrangiano sería

$$L(q,\dot q)=\tfrac{1}{2}\left[\left(16ma^2\right)\dot q^2-4mgaq^2\right], \tag{26}$$

que es el lagrangiano de un oscilador lineal. Por enésima vez, encontramos que la frecuencia está dada por

$$\omega=\sqrt{\frac{4mga}{16ma^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}. \tag{27}$$

■ Problema 2

Dado el primer par de transformaciones para un sistema de dos grados de libertad,

$$Q_1=q_1^2,\qquad Q_2=q_1+q_2. \tag{†}$$

a) Suponiendo una función generatriz de tipo F_2 independiente del tiempo. ¿Qué par de ecuaciones diferenciales debe satisfacer para ser compatible con las relaciones (†)?

b) Integre las ecuaciones y encuentre la familia de funciones generatrices $F_2(q_1,q_2,P_1,P_2)$ más general compatible con las ecuaciones (†).

c) Para esa familia de funciones, dar las ecuaciones de transformación de los impulsos,

$$P_i = P_i(q_1, q_2, p_1, p_2).$$

d) Dado un sistema cuyo hamiltoniano es

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1}\right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2,$$

elija una de las F_2 dentro de la familia de funciones posibles, de modo que Q_1 y Q_2 sean cíclicas respecto del nuevo hamiltoniano H'. Escriba H' explícitamente.

■ **Solución**. Las dos ecuaciones conocidas son

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_1} = q_1^2, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P_2} = q_1 + q_2. \tag{28}$$

Integrando la primera, resulta

$$F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_1^2 P_1 + f(q_1, q_2, P_2). \tag{29}$$

Derivando esta ecuación respecto de P_2 e igualando con la segunda ec. (28) queda

$$\frac{\partial f}{\partial P_2}(q_1, q_2, P_2) = q_1 + q_2. \tag{30}$$

Integrando,

$$f(q_1, q_2, P_2) = (q_1 + q_2)P_2 + g(q_1, q_2). \tag{31}$$

Nada más podemos decir. La función g es arbitraria. En definitiva, la familia de funciones posibles está dada por

$$F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_1^2 P_1 + (q_1 + q_2)P_2 + g(q_1, q_2). \tag{32}$$

El otro par de ecuaciones de transformación es

$$p_1 = \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = 2q_1 P_1 + P_2 + \frac{\partial g}{\partial q_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = P_2 + \frac{\partial g}{\partial q_2}, \tag{33}$$

que pueden reescribirse con todas las variables nuevas de un lado y las antiguas al otro. Empezando por la segunda, despejamos P_2 en términos de p_2 y de $\partial g/\partial q_2$. Luego usamos eso en la primera ecuación y despejamos P_1,

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2q_1}\left(p_1 - p_2 - \frac{\partial g}{\partial q_1} + \frac{\partial g}{\partial q_2}\right), \\ P_2 &= p_2 - \frac{\partial g}{\partial q_2}. \end{aligned} \tag{34}$$

■ La aplicación de estas transformaciones al hamiltoniano propuesto lleva a una expresión provisoria, que mezcla ambos grupos de variables. Unas deben entenderse como funciones de las otras:

$$H' = \left[P_1 + \frac{1}{2q_1}\left(\frac{\partial g}{\partial q_1} - \frac{\partial g}{\partial q_2}\right)\right]^2 + P_2 + \frac{\partial g}{\partial q_2} + (q_1 + q_2)^2. \tag{35}$$

Las variables Q_1 y Q_2 sólo pueden aparecer en esta expresión a través de las variables q_1 y q_2, ya que en las transformaciones (†) los impulsos no participan. Entonces, para que las variables Q_1 y Q_2 resulten cíclicas hay que cancelar todos los términos en donde aparecen q_1 y q_2. La forma más evidente de lograr eso es eligiendo g de forma tal que

$$\frac{\partial g}{\partial q_1} - \frac{\partial g}{\partial q_2} = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial q_2} = -(q_1 + q_2)^2. \tag{36}$$

Si no funciona, se probará otra cosa, pero por lo pronto ensayamos lo más simple. Integrando la última de las ecs. (36), obtenemos

$$g(q_1, q_2) = -\frac{1}{3}(q_1 + q_2)^3 + h(q_1). \tag{37}$$

Para esta función resulta, por otro lado,

$$\frac{\partial g}{\partial q_1} - \frac{\partial g}{\partial q_2} = \frac{dh(q_1)}{dq_1}, \tag{38}$$

que, según la primera ec. (36), implica que h debe ser constante. Podemos elegir entonces $h = 0$. Finalmente, la F_2 buscada es

$$F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_1^2 P_1 + (q_1 + q_2)P_2 - \frac{1}{3}(q_1 + q_2)^3, \tag{39}$$

y el nuevo hamiltoniano, escrito en sus variables correctas, es

$$H'(P_1, P_2) = P_1^2 + P_2. \tag{40}$$

■ Posdata: aunque con otras vestiduras, la F_2 que encontramos hace el mismo trabajo y satisface la misma ecuación diferencial que la función característica W para la ecuación de Hamilton-Jacobi. La solución del problema en las nuevas variables es trivial. Los impulsos P_1 y P_2 son constantes, y las coordenadas Q_1 y Q_2 evolucionan de acuerdo al par de ecuaciones canónicas

$$\dot{Q}_1 = 2P_1, \qquad \dot{Q}_2 = 1. \tag{41}$$

Es decir,

$$Q_1(t) = 2P_1 t + Q_{10}, \qquad Q_2(t) = t + Q_{20}. \tag{42}$$

A partir de las transformaciones (†) y (33), resulta

$$\begin{cases} q_1(t) &= \pm\big(2P_1 t + Q_{10}\big)^{1/2}, \\ q_2(t) &= t + Q_{20} - q_1(t), \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1(t) &= 2P_1 q_1(t) + P_2 - (Q_{20}+t)^2, \\ p_2(t) &= P_2 - (Q_{20}+t)^2. \end{cases} \tag{43}$$

■ Epílogo: siempre que tengan una ecuación de la forma

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0, \tag{44}$$

significa que $g(x,y) = g(x+y)$. Saber esto resultaba útil para integrar las ecuaciones (36). La demostración es sencilla: cualquier función de x e y puede escribirse como una función del par de variables $u = x+y$ y $v = x-y$,

$$g(x,y) = F(x+y, x-y), \tag{45}$$

donde $F(u,v) = g\big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\big)$. Por otro lado,

$$\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right) = 2\frac{\partial}{\partial v}. \tag{46}$$

Luego, la ec. (44) se lee como

$$\frac{\partial F(u,v)}{\partial v} = 0, \tag{47}$$

lo que quiere decir que $F(u,v) = F(u)$, y, por lo tanto $g(x,y) = F(x+y)$. Recíprocamente, si cambian el signo en la ec. (44), entonces debe ser $g(x,y) = F(x-y)$.

■ Problema 3

Al hamiltoniano de un oscilador lineal se le agrega un término proporcional a qp,

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\big(p^2 + \epsilon qp + q^2\big),$$

donde $0 \leqslant \epsilon < 2$ es una constante.

a) Escriba una transformación canónica $Q(q,p)$ y $P(q,p)$ que sea una rotación de ángulo λ en el plano qp. (Sólo se piden las ecs. de transformación, no la función generatriz).

b) Elija λ para que el nuevo hamiltoniano de las variables Q y P tenga la forma

$$H'(Q,P) = aP^2 + bQ^2.$$

Escriba H' explícitamente.

c) ¿Cuál es la frecuencia con que evolucionan las variables Q y P? ¿Y las variables q y p?

d) Tomando como hamiltoniano sin perturbar $H_0(q,p) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$, verificar que el resultado anterior para la frecuencia es consistente con la frecuencia que se obtiene aplicando el método canónico de perturbaciones hasta primer orden en ϵ. (Casi no requiere cuentas).

■ **Solución**. La transformación de rotación es

$$\begin{aligned} Q(q,p) &= q\cos\lambda + p\sin\lambda, \\ P(q,p) &= p\cos\lambda - q\sin\lambda. \end{aligned} \tag{48}$$

Y su inversa:

$$\begin{aligned} q(Q,P) &= Q\cos\lambda - P\sin\lambda, \\ p(Q,P) &= P\cos\lambda + Q\sin\lambda. \end{aligned} \tag{49}$$

El nuevo hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H'(Q,P) &= \tfrac{1}{2}(P^2+Q^2) + \tfrac{1}{2}\epsilon\Big[(Q^2-P^2)\cos\lambda\sin\lambda + PQ(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda)\Big] \\ &= \tfrac{1}{2}\Big[P^2\left(1-\tfrac{1}{2}\epsilon\sin 2\lambda\right) + Q^2\left(1+\tfrac{1}{2}\epsilon\sin 2\lambda\right)\Big] + \tfrac{1}{2}\epsilon PQ(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda). \end{aligned} \tag{50}$$

Para anular el término proporcional a PQ basta elegir $\lambda = \pi/4$. Entonces

$$H'(Q,P) = \tfrac{1}{2}\Big[P^2\left(1-\tfrac{1}{2}\epsilon\right) + Q^2\left(1+\tfrac{1}{2}\epsilon\right)\Big]. \tag{51}$$

Este es el hamiltoniano de un oscilador lineal de frecuencia

$$\omega_0^2 = \left(1-\tfrac{1}{2}\epsilon\right)\left(1+\tfrac{1}{2}\epsilon\right) = 1 - \tfrac{1}{4}\epsilon^2. \tag{52}$$

Si hay dificultad en ver esto, lo más sencillo es escribir el hamiltoniano de un oscilador lineal en su versión usual,

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{m} + m\omega^2 q^2\right). \tag{53}$$

La frecuencia al cuadrado es el producto de los coeficientes que multiplican a p^2 y q^2 dentro del paréntesis. Otra manera sería escribiendo las ecuaciones canónicas. Si $H = aP^2 + bQ^2$,

$$\dot{Q} = 2aP, \qquad \dot{P} = -2bQ. \tag{54}$$

Derivando la primera ecuación y reemplazando $\dot{P}$ por su expresión en términos de Q,

$$\ddot{Q} = -4abQ, \tag{55}$$

y de aquí se deduce que $\omega^2 = 4ab$.

En resumen: las variables Q y P oscilan armónicamente con frecuencia ω_0. Por otro lado, debido a que la relación entre las nuevas y las antiguas coordenadas es lineal, q y p también realizarán movimientos armónicos con la misma frecuencia ω_0.

■ Respecto a la teoría de perturbaciones. La corrección a primer orden de la frecuencia surge de calcular el valor medio de la perturbación

$$\epsilon H_1 = \tfrac{1}{2}\epsilon p q \to \epsilon\omega_1 = \epsilon \frac{d\overline{H}_1}{dI}. \tag{56}$$

Ahora bien, en términos de las variables de ángulo-acción, p y q son proporcionales a $\cos\theta$ y $\sin\theta$, respectivamente. Por lo tanto, el valor medio de la perturbación será nulo:

$$\overline{H}_1 \propto \int_0^{2\pi} d\theta \ \sin\theta\cos\theta = 0. \tag{57}$$

Luego, no hay corrección a la frecuencia a primer orden en ϵ. Esto es compatible con el resultado (52), que implica

$$\omega_0 = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}\epsilon^2} = 1 - \tfrac{1}{8}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4). \tag{58}$$

■ Comentario aparte: la dinámica de las variables q y p no era imposible de obtener directamente a partir del hamiltoniano original. Sus ecuaciones canónicas son

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p + \tfrac{1}{2}\epsilon q, \\ \dot{p} &= -q - \tfrac{1}{2}\epsilon p. \end{aligned} \tag{59}$$

Podría buscarse un par de combinaciones lineales independientes en donde las ecuaciones se desacoplaran (difícil), o al menos tomaran la forma de las ecuaciones canónicas de un oscilador lineal en su forma usual (fácil). Por ejemplo, probemos restar y sumar ambas ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}(q+p) = \left(1 - \tfrac{1}{2}\epsilon\right)(p-q), \qquad \frac{d}{dt}(p-q) = -\left(1 + \tfrac{1}{2}\epsilon\right)(q+p). \tag{60}$$

Esto ya tiene la forma de las ecuaciones canónicas de un oscilador de masa m y frecuencia ω. Bastaría hacer las identificaciones

$$\begin{aligned} q + p &= X, \qquad & p - q = \Pi, \qquad (!) \\ \left(1 - \tfrac{1}{2}\epsilon\right) &= \frac{1}{m}, \qquad & \left(1 + \tfrac{1}{2}\epsilon\right) = m\omega^2, \end{aligned} \tag{61}$$

donde la dinámica de X y Π se obtendría del hamiltoniano

$$\mathcal{H}(X, \Pi) = \frac{\Pi^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}X^2. \tag{62}$$

El detalle a tener en cuenta es que, así definidas, X y Π no satisfacen la relación de conmutación canónica, sino que

$$[X, \Pi] = [q, p] - [p, q] = 2. \tag{63}$$

Sin embargo, esto se soluciona multiplicando a X y a Π por un par de factores cuyo producto sea $1/2$. Lo más simétrico es elegir ese factor igual para ambas variables, reemplazando las dos primeras ecs. (61) por estas otras:

$$\begin{aligned} \frac{q+p}{\sqrt{2}} &= X, \\ \frac{p-q}{\sqrt{2}} &= \Pi. \end{aligned} \tag{64}$$

Estos factores $1/\sqrt{2}$ no tienen ninguna incidencia en las definiciones de la masa y la frecuencia en la ec. (61), porque las ecs. (60) se mantienen invariantes si se multiplican ambos miembros por el mismo factor.

Ahora sí las variables X y Π son variables canónicas cuya evolución está dada por el hamiltoniano (62). De manera que la frecuencia es

$$\omega_0 = \sqrt{\left(1 - \tfrac{1}{2}\epsilon\right)\left(1 + \tfrac{1}{2}\epsilon\right)}. \tag{65}$$

Conocidas las soluciones para X y Π, la evolución de q y p se obtiene a partir de las transformaciones inversas,

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - \Pi), \qquad p = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Pi + X). \tag{66}$$

Notar que este método de solución conduce a las mismas relaciones entre q y p y X y Π que las que había antes entre q y p y Q y P cuando se elegía $\lambda = \pi/4$, ec. (48).

Un camino más sistemático consiste en resolver el sistema (59) en forma directa, escribiéndolo matricialmente:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\epsilon & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}. \tag{67}$$

Se propone una solución de la forma

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = e^{i\omega t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \tag{68}$$

que lleva a escribir el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\epsilon & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{69}$$

Para tener soluciones no triviales debe anularse el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\epsilon - i\omega & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}\epsilon - i\omega \end{pmatrix}. \tag{70}$$

De aquí se siguen todos los resultados ya obtenidos. Este método tiene parentesco con el formalismo de pequeñas oscilaciones. Es instructivo terminar el problema escribiendo de manera íntegra $q(t)$ en términos de $q(0)$ y $\dot{q}(0)$.

Fórmulas a vuelta de hoja.

Fórmulas gratis provistas en la hoja del parcial:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin 2x = 2\cos x \sin x,$$

$$\int dx\ \sqrt{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\Big[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\Big],$$

$$dF_2 = p_i dq_i + Q_i dP_i + (H' - H)dt.$$

$$\text{R otación 2D} \begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' = y\cos\varphi - x\sin\varphi. \end{cases}$$

Fórmulas en el pizarrón (requiere suscripción):

$$\int dx\ \frac{df(x)}{dx}\sqrt{1-f(x)^2} = \tfrac{1}{2}\Big[f(x)\sqrt{1-f(x)^2} + \arcsin f(x)\Big],$$

$$\int dx\ \cos\tfrac{u}{2}\sqrt{1-\alpha\sin^2\tfrac{u}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\Big[\sqrt{\alpha}\sin\tfrac{u}{2}\sqrt{1-\alpha\sin^2\tfrac{u}{2}} + \arcsin\big(\sqrt{\alpha}\sin\tfrac{u}{2}\big)\Big].$$

Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

entonces

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int^{x_1} dx\ F(x, x_2, \ldots, x_n) + g_1(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$