Mecánica Clásica - primer cuatrimestre de 2021

Guía 3: *Fuerzas centrales y dispersión*

1. Dos partículas se mueven una alrededor de la otra en órbitas circulares bajo la influencia de fuerzas gravitatorias. El período del movimiento es τ. Este movimiento es detenido súbitamente; luego las partículas caen una hacia la otra. Discuta por qué. Demuestre que chocan después de un tiempo $\tau/4\sqrt{2}$.

2. El potencial de un oscilador isótropo es

$$V(r) \;=\; \frac{kr^2}{2} \qquad (k > 0)\;.$$

   (a) Escriba el Lagrangiano justificando por qué el movimiento es plano. Estudie el problema unidimensional equivalente.

   (b) Realice un análisis funcional del potencial efectivo. Encuentre el radio, la energía y el período para el caso en que la órbita es circular. Analice su estabilidad.

   (c) Grafique el potencial efectivo para un caso general. Discuta los movimientos posibles en función del valor de la energía. ¿Cómo se modifica el movimiento si, manteniendo la energía constante, aumenta el momento angular? Piense en el límite $\ell \to 0$.

   (d) Describa la naturaleza de las órbitas cuando difieren levemente de la órbita circular. Encuentre la frecuencia de oscilación radial.

3. Discuta el movimiento de una partícula en un campo de fuerza central

$$F(r) \;=\; -\frac{k}{r^2} + \frac{c}{r^3} \qquad (k, c > 0)\;.$$

   (a) Muestre que la ecuación de la órbita puede escribirse de la forma

$$r = \frac{d}{1 + e\cos(\alpha\varphi)}\;.$$

   Encuentre el valor de las constantes d, e y α en el caso $E < 0$. (*Ayuda*: Observe que el problema se reduce al de Kepler si se redefinen el momento y la variable angular apropiadamente. Por lo tanto, si ya resolvió el problema de Kepler, no es necesario calcular nuevamente la órbita.)

   (b) Muestre que partiendo de la ecuación de Euler-Lagrange para r y realizando el cambio de variables $u(\varphi) = 1/r(\varphi)$ se obtiene la ecuación de Binet

$$u''(\varphi) + u(\varphi) + \frac{\mu}{\ell^2\, u(\varphi)^2}\, F\left(\frac{1}{u(\varphi)}\right) \;=\; 0\;.$$

   Repita el inciso anterior usando esta ecuación.

   (c) Cuando $\alpha = 1$ esta ecuación representa una elipse. Cuando $\alpha > 1$ es una elipse que precede. El movimiento de precesión puede describirse en términos de la velocidad angular de precesión del perihelio. Encuentre esta velocidad en términos de α.

Algunos datos: En el caso de la elipse ($e < 1$), si A es el semi-eje mayor, B el menor y F el foco, entonces la excentricidad, el perihelio y el afelio (distancias de mínimo y máximo acercamieniento) son

$$e = \frac{F}{A} = \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}\,, \qquad r_{per} = A(1-e)\,, \qquad r_{af} = A(1+e)\,, \qquad d = \frac{B^2}{A} = A(1-e^2)\,.$$

4. Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de un potencial central $V(r) = k/r^2$.

   (a) Para el caso en que el potencial sea repulsivo y $E > 0$, interpretar el movimiento a partir del potencial efectivo. Hallar la ecuación de la trayectoria $r(\varphi)$ de la partícula como función de constantes de movimiento Dibujar la trayectoria en el plano $x - y$. Calcular las direcciones de las asíntotas, si las hubiere. ¿Qué ocurre cuando $k = 0$? Verificar que en el límite $k \longrightarrow 0$ la solución hallada es la físicamente correcta.

   (b) Suponer ahora que el potencial es atractivo y que $\ell^2 < -2mk$ y $E < 0$. Interpretar el movimiento a partir del potencial efectivo. Dibujar la trayectoria, tomando $\varphi_0 = 0$ en el punto de retorno r_0. Mostrar que el tiempo que tarda la particula en llegar al origen si partió de un punto de retorno es $\tau = \sqrt{\ell^2 + 2mk}/2|E|$.

   (c) ¿Cómo se modifica la trayectoria cuando $l^2 > -2mk > 0$?

Ayuda:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a - bu^2}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{b}} \arccos\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\, u\right), & \text{si } a, b > 0; \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{-b}} \operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\, u\right), & \text{si } a, b < 0. \end{cases}$$

5. Una partícula de masa m se mueve en un campo central cuyo potencial viene dado por

$$V(r) = -\frac{k}{r^4} \qquad (k > 0)\,.$$

   (a) A partir del Lagrangiano obtenga el potencial efectivo y realice un análisis funcional del mismo. ¿Existe alguna órbita circular? En caso afirmativo, determine su radio, energía y período como función del momento angular. Analice su estabilidad.

   (b) Utilizando esta información grafique el potencial efectivo. Discuta cualitativamente las trayectorias posibles. Halle r_0 donde $V_{eff}(r_0) = 0$.

   (c) Muestre que $r(\varphi) = A\cos(\varphi)$ es una solución posible y determine A usando la ecuación de Binet (ver ejercicio 3.b). Interprete este movimiento y dibuje la trayectoria. ¿A qué órbita de las halladas en a) corresponde? ¿Cuál es su energía?

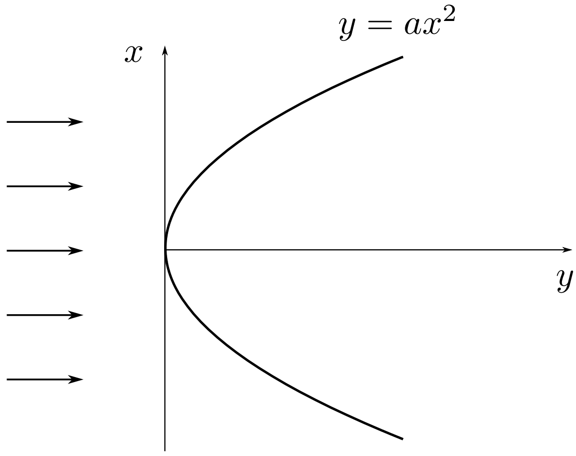
6. Un satélite de masa m se mueve en un potencial central atractivo, $V(r) = -k/r$. Súbitamente el valor de la constante k se reduce a la mitad. Encuentre la nueva órbita.

Dispersión

7. Calcule la sección eficaz de dispersión de partículas por una esfera perfectamente rígida de radio R.

8. Sobre una esfera rígida incide un haz de partículas. Las partículas que chocan contra la esfera son absorbidas con una probabilidad proporcional a la componente de su velocidad normal a la esfera, $p = q|v_n|$ (asuma q conocido). Las partículas que no son absorbidas rebotan elásticamente. La probabilidad total es 1. Hallar las sección eficaz diferencial y la total.

9. Calcule la sección eficaz diferencial y total para partículas que inciden sobre un paraboloide de revolución, con el cual chocan de manera perfectamente elástica, como muestra la primera figura.



10. Calcule la sección eficaz de dispersión de partículas de masa m en un pozo de potencial esféricamente simétrico, con $V = 0$ para $r \geq a/2$ y $V = -V_0$ para $r < a/2$.