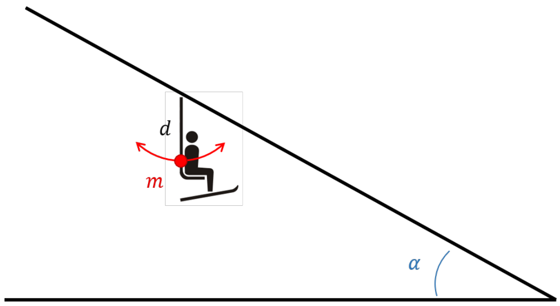
Primer Parcial de Mecánica Clásica - primer cuatrimestre de 2021

Justifique todas sus respuestas, basándose en argumentos autocontenidos. No se aceptarán como válidas justificaciones del estilo: “como vimos en la practica del 27/04” o “segun el pdf de fulano/a”. Leyendo lo escrito debería entenderse el argumento.

Se aprueba con 6 puntos, con la condición de tener al menos dos de los ejercicios con más del 50% de su desarrollo correcto.

Ponga su nombre en la primer hoja y enumere todas las carillas. Entregue un único PDF con los distintos problemas en hojas separadas, con nombre de archivo *Apellido_Nombre_LUxxxx*. La entrega se hará en el campus, en la solapa “primer parcial”. De haber algun problema con el campus, puede enviarse por mail a mauricioleston@gmail.com con copia a maxx.coppola@gmail.com

1. (**2.5 ptos**) Un esquiador desciende en una aerosilla que idealizaremos como un objeto puntual de masa m, suspendida a una distancia d de un cable sin masa sobre el que puede deslizar libremente sin fricción. Inicialmente se encuentra apartada de la vertical un cierto ángulo.



   (a) Diga cuantos grados de libertad tiene la aerosilla (en esta idealización) y escriba el Lagrangiano que describe su dinámica. Describa cualitativamente el movimiento.

   (b) Halle las ecuaciones de movimiento y encuentre una cantidad conservada, indicando la simetría asociada.

   (c) Considere ahora que el punto de contacto de la aerosilla se mueve con un motor a velocidad constante de modulo v (una situación más realista que la del inciso anterior). Vea como cambian los puntos anteriores y evalué si substiste la simetría que dio lugar a la cantidad conservada del caso anterior. Reescriba este Lagrangiano de forma tal que el término cinético sea cuadrático en las velocidades.

2. (**2,5 ptos**) Considere una partícula de masa m sometida a una fuerza $-kx$. Esta se halla en un movimiento unidimensional siguiendo una trayectoria que satisface: $x(0) = 0$ y $x(T) = a$, siendo $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$

   (a) Halle la acción S para el intervalo $(0, T)$ correspondiente a la trayectoria real (la que obedece a las ecuaciones de movimiento) que se ajusta a esas condiciones. Verifique que esta acción es 0 y que por tanto el promedio temporal en el intervalo $(0, T)$ de la energía cinética y el de la energía potencial son iguales. (Este es un caso partícular del llamado Teorema del Virial).

   (b) Evalúe ahora la acción para trayectorias de la forma $x(t) = A(\omega)sin(\omega t)$, que satisfagan las condiciones iniciales y finales del problema, con ω generico (con la unica restricción de que $sin(\omega T) \neq 0$). A fin de llegar a una expresión compacta, use la variable $\lambda \equiv \frac{\omega}{\omega_0}$, siendo $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Muestre que si desarrolla la acción anterior en torno a $\omega = \omega_0$ (es decir, si hace la expansion en ϵ definido por $\lambda = 1 + \epsilon$), el primer orden en dicha expansión se anula. Diga porque debería pasar esto. ¿Qué espera que ocurra en la expansión a segundo orden en ϵ?

Observación: si bien no es inmediato verlo, la expresión obtenida para $\lambda \neq 1$ debería ser mayor cero, es decir, el promedio de la energía cinetica resulta ser mayor que el de la potencial. Puede checkearlo luego haciendo un grafico con ayuda de un programa.

[Ayuda: identidades útiles para hacer integrales: $cos^2(\alpha) = \frac{1+cos(2\alpha)}{2}$, $sen^2(\alpha) = \frac{1-cos(2\alpha)}{2}$. Para el punto (c), al hacer la expansión es útil recordar que $sen(\frac{\pi}{2} + \alpha) = cos(\alpha)$, $sen(\pi + \alpha) = -cos(\alpha)$]

3. (**2,5 ptos**) Considere dos partículas de masa m_1 y m_2 interactuando via un potencial que dependa de la distancia r entre ellas como:

$$V(r) = -\frac{k}{r^4}\,, \qquad k > 0$$

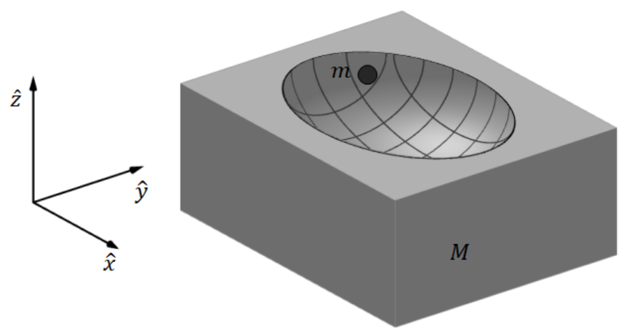
   (a) Escriba el Lagrangiano y estudie el problema unidimensional equivalente justificando los pasos necesarios. Muestre que existe una única orbita circular r_c. Halle su energía, momento angular y período en términos de r_c (y la masa reducida). Analice su estabilidad.

   (b) Grafique el potencial efectivo a partir de un análisis funcional (límites, puntos críticos, estabilidad). Discuta cualitativamente las trayectorias posibles.

   (c) Halle la expresión $r(\varphi)$ de una trayectoria que tenga la misma energía y momento angular que la del item anterior pero que a un instante inicial $t_0 = 0$ se halle en un radio muy cercano al cero (aproxime $r_0 \sim 0$), con $\dot{r} > 0$. ¿Alcanzará esta trayectoria el punto $r = r_c$? ¿En cuánto tiempo? Note que las expresiones a integrar se simplifican notablemente en esta trayectoria.

Ayudas:
- $\int \frac{1}{b^2 - x^2} dx = \frac{1}{b}\,\text{atanh}\left(\frac{x}{a}\right)$
- $\int \frac{x^2}{b^2 - x^2} dx = b\,\text{atanh}\left(\frac{x}{a}\right) - x$
- $\int \tanh^2(bx) dx = x - \frac{\tanh(bx)}{b}$

4. (**2,5 ptos**) Considere el objeto de la figura, de masa M, que está apoyado sobre el suelo, cuya superficie tiene la forma de una sección de un elipsoide de ecuación: $\frac{z^2}{h^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$, donde (x, y, z) son coordenadas tomadas desde el centro del elipsoide. El objeto está confinado a moverse solo en la dirección del eje x. Sobre él hay una partícula de masa m, que no presenta fricción con él.



   (a) Escriba el lagrangiano del sistema y halle un punto de equilibrio estable.

   (b) Escriba el lagrangiano que describe el sistema para pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio.

   (c) Encuentre las frecuencias de oscilación. Sin hacer la cuenta necesariamente, describa gráficamente los modos normales que espera que tenga el sistema.

   (d) ¿Qué modos se prenderán si estando el sistema en reposo incialmente, se le pega un golpe al objeto en la dirección del eje x?