Mecánica Clásica - primer cuatrimestre de 2021

Guía 6: *Formulación Hamiltoniana*

En esta guía comenzaremos a ver un nuevo formalismo, relacionado con el Lagrangiano, en el que a grosso modo, velocidades y posiciones pasan a ser tratadas como variables independientes. Este nos llevara al Hamiltoniano, las ecuaciones de Hamilton (analogas a las de Euler-Lagrange) y transformaciones especiales que preservan la forma de esas ecuaciones: las transformaciones canónicas. Este formalismo es de particular relevancia en mecánica cuántica y fisica estadistica.

1. Escriba el hamiltoniano, las ecuaciones de Hamilton y construya los diagramas de fases para:

   (a) Un oscilador armónico tridimensional (no necesariamente isótropo). Utilizar coordenadas cartesianas. Resuelva las ecuaciones.

   (b) Una partícula en un potencial central $U(r)$. Halle constantes de movimiento. Suponga en particular que $U(r) = -k/r$ y discuta las órbitas posibles.

   (c) Un trompo simétrico que se mueve libremente (sin gravedad). Repita pero asumiendo que tiene un punto fijo en un campo gravitatorio uniforme. Halle constantes de movimiento.

   (d) Una máquina de Atwood, considerando los casos en que la polea, de radio R, tiene masa cero o masa M.

2. Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para un oscilador armónico tridimensional isótropo en coordenadas *cilíndricas* y *esféricas*. Construya los correspondientes diagramas de fases.

3. Una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía en el tiempo: $r = r(t)$, donde $r(t)$ es una función conocida. Obtenga el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discuta la conservación de la energía. ¿Es el hamiltoniano igual a la energía total?

4. Considere una partícula moviéndose en un plano bajo la influencia del potencial generalizado $V = \frac{1}{r}(1 + \dot{r}^2)$, donde r es la distancia al origen. Encuentre los momentos generalizados p_r y p_θ, y el hamiltoniano. Obtenga las ecuaciones canónicas y muestre que el impulso angular se conserva. ¿Se conserva H? ¿Es $H = E$? Reduzca el problema para r a una ecuación diferencial de primer orden.

5. Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para una partícula cargada en un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B}$, en la dirección $\hat{z}$. Utilice el gauge simétrico $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ y recuerde que el potencial generalizado es $U = -(q/c)\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$.

6. Un sistema consiste en dos masas puntuales m_1 y m_2 que interactúan con un potencial $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Muestre que su hamiltoniano puede escribirse como $H = H_{\mathrm{cm}} + H_{\mathrm{rel}}$, con

$$H_{\mathrm{cm}} = \frac{P_{\mathrm{cm}}^2}{2M} \qquad\qquad H_{\mathrm{rel}} = \frac{p_{\mathrm{rel}}^2}{2\mu} + V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

   donde: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida del sistema, $M = m_1 + m_2$, $\mathbf{L}$ es el momento angular total y p_{rel} es el momento canónicamente conjugado de r.

7. Pruebe que si se hace una transformación canónica de (q, p) a (Q, P) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} &= \frac{\partial P_j}{\partial p_i} & \qquad \frac{\partial q_i}{\partial P_j} &= -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \\ \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} &= -\frac{\partial P_j}{\partial q_i} & \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_j} &= \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

8. Demuestre que la transformación a nuevas coordenadas (q_1, q_2, p_1, p_2)

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2) & \qquad p_x &= \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(+\sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2) & \qquad p_y &= \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2), \end{aligned}$$

donde $\omega = qB/mc$, es canónica. Úsela para encontrar una solución alternativa del problema 5.

9. Muestre que la transformación

$$Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right), \quad P = q\cot p$$

es canónica, y determine las funciones generatrices $F_1(q, Q)$ y $F_2(q, P)$.

10. Considere un oscilador bidimensional con hamiltoniano

$$H(p, q) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Muestre que la transformación que sigue es canónica y halle el nuevo hamiltoniano $\tilde{H}(P, Q)$ y las correspondientes ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned} x &= X\cos\lambda + \frac{P_y \sin\lambda}{m\omega} & \qquad p_x &= -m\omega Y \sin\lambda + P_x\cos\lambda \\ y &= Y\cos\lambda + \frac{P_x \sin\lambda}{m\omega} & \qquad p_y &= -m\omega X \sin\lambda + P_y\cos\lambda. \end{aligned}$$

Describa además el movimiento del oscilador bidimensional cuando $Y = P_y = 0$ en $t = 0$.

11. Demuestre las siguientes propiedades de los corchetes de Poisson, siendo f, g, h funciones arbitrarias de p_i, q_i; $F(f)$ es una función de f y c es una constante.

    (a) $[f, c] = 0$
    (b) $[f, g] + [g, f] = 0$ (antisimetría)$\rightarrow$ $[f, f] = 0$
    (c) $[f + g, h] = [f, h] + [g, h]$ (linealidad)
    (d) $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$ (propiedad similar a la derivada respecto al producto)
    (e) $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$ (identidad de jacobi)

12. Habitualmente, uno considera corchetes de Poisson entre las variables q_i y q_j y funciones de estas. Demuestre las siguientes relaciones:

    (a) $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$; $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$

    (b) $[f, q_i] = -\frac{\partial f}{\partial p_i}$; $[f, p_i] = \frac{\partial f}{\partial q_i}$

    (c) $[g, F(f)] = F'(f)[g, f]$ (Esta última implica que $[f, F(f)] = 0$)

13. Muestre que las transformaciones canónicas preservan el corchete de Poisson. En vez de hacerlo en forma general, vealo en casos particulares, utilizando las transformaciones canonicas de los primeros ejercicios.

14. Muestre que:

$$\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}]$$

    Observe que no fue necesario usar las ecuaciones de Hamilton para esto.

15. Algunas simetrías de un sistema, que en el formalismo Lagrangiano daba lugar a cargas de Noether, en el formalismo Hamiltoniano se manifiestan de otra forma. A fin de ver esto, considere los siguientes puntos:

    (a) Demuestre que $\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$. ¿Qué obtiene para $f = q_i$ y $f = p_i$? Si f no depende explícitamente del tiempo, muestre que la condición necesaria y suficiente para que f sea constante de movimiento es que $[f, H] = 0$.

    (b) Un función del espacio de fases G induce una transformación canónica infinitesimal, de paramétro ϵ, de la siguiente forma:

$$(q_j, p_j) \to (q_j + \epsilon\{q_j, G\}, p_j + \epsilon\{p_j, G\})$$

    En en caso en que haya una coordenada ciclica q_i, muestre que la transformación infinitesimal inducida por $G = p_i$ es la esperada de acuerdo al teorema de Noether.

16. Considere los siguientes puntos:

    (a) Muestre que si f y g son constantes de movimiento, también lo es $[f, g]$.

    (b) Calcule explícitamente, para una partícula, los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas de $\mathbf{L}$ con las de $\mathbf{p}$ y las de $\mathbf{r}$. Además calcule $[L_x, L_y]$, $[L_y, L_z]$, $[L_x, L^2]$, donde $L^2 = |\mathbf{L}|^2$.