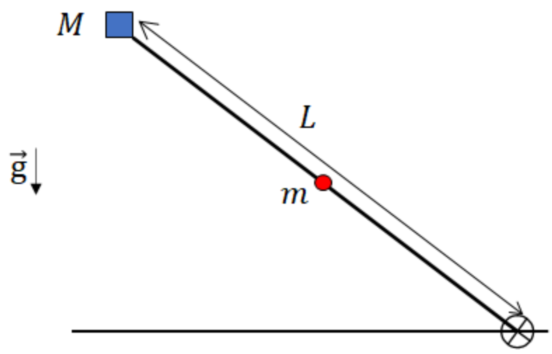
Recuperatorio del Primer Parcial de Mecánica Clásica - primer cuatrimestre de 2021

Justifique todas sus respuestas, basándose en argumentos autocontenidos. No se aceptarán como válidas justifaciones del estilo: “como vimos en la practica del 27/04” o “segun el pdf de fulano/a”. Leyendo lo escrito debería entenderse el argumento.

Se aprueba con 6 puntos, con la condición de tener al menos dos de los ejercicios con más del 50% de su desarrollo correcto.

Ponga su nombre en la primer hoja y enumere todas las carillas. Entregue un único PDF con los distintos problemas en hojas separadas, con nombre de archivo *Apellido_Nombre_LUxxxx*. La entrega se hará en el campus, en la solapa “primer recuperatorio”. De haber algun problema con el campus, puede enviarse por mail a mauricioleston@gmail.com con copia a maxx.coppola@gmail.com

1. (**2.5 ptos**) Considere una varilla de longitud constante L de masa despreciable. Uno de sus extremos se encuentra anclado al piso mediante un tornillo que le permite girar entorno a ese eje. El otro extremo tiene adherido un cuerpo de masa M. Además, enhebrado a esta varilla se encuentra partícula de masa m. Inicialmente se eleva la masa M hasta cierta altura y se las deja caer libremente. La masa m se encuentra alejada de M de manera que, durante la evolución del sistema, no puedan chocar.



   (a) Diga cuantos grados de libertad tiene el sistema y escriba el Lagrangiano que describe su dinámica. Describa cualitativamente el movimiento.

   (b) Halle las ecuaciones de movimiento y encuentre una cantidad conservada, indicando la simetría asociada.

   (c) Ahora considere que la varilla se conecta a un motor el cual hace que M me desplace a velocidad constante. Vea como cambian los puntos anteriores y valúe si subsiste la simetría que dio lugar a la cantidad conservada del caso anterior. En este caso M no modifica la dinámica del sistema; muestre esto reescribiendo el Lagrangiano de forma que no aparezca M.

2. (**2.5 ptos**) Considere los dos puntos de la Tierra A y B de la figura. Se quiere construir un tunel entre A y B de forma tal que dejando en caida libre un objeto de masa m en A , inicialmente en reposo, llegue en el tiempo más corto al punto B por la sola acción del campo gravitario. Ver la figura, donde se muestra un plano que pasa por el centro de la Tierra. El túnel se encuentra en ese plano.

   Se pide encontrar la ecuación de la curva que minimiza ese tiempo. Para este ejercicio considere a la Tierra como una esfera homogénea de densidad ρ. Con esta consigna alcanza para resolver el problema. Lo que sigue son ayudas para encaminar la solución:

   (a) Sin saber aún la forma de la curva $(\phi, r(\phi))$ (r la distancia del punto de la curva al centro de la tierra), muestre que la velocidad en un dado punto del túnel es:

$$v(\phi, r) = \sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{R^2 - r^2}$$

Aquí g es el valor de la aceleración de un cuerpo bajo la acción de la gravedad en la superficie de la tierra. Para llegar a esa expresión debe usar la energía potencial en el interior de la Tierra que, de acuerdo a consideraciones hechas en F1 y F3, se puede ver que es de la forma $V(r) = mg\frac{r^2}{2R}$. Observe que el resultado de este y los siguientes items no depende de la masa m.

(b) Usando esa expresión, muestre que el tiempo empleado para ir de A a B se escribe como la siguiente integral:

$$T_{A\to B} = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{\sqrt{r^2 + r'(\varphi)^2}}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, \mathrm{d}\varphi$$

Este tiempo es el empleado para cualquier curva, con la condición $r(\phi_A) = r(\phi_B) = R$.

(c) Escriba las ecuaciones de Euler-Lagrange y, basandose en la simetría del integrando, halle una cantidad que se mantenga constante a lo largo de la curva. A partir de esa ley de conservación, muestre que:

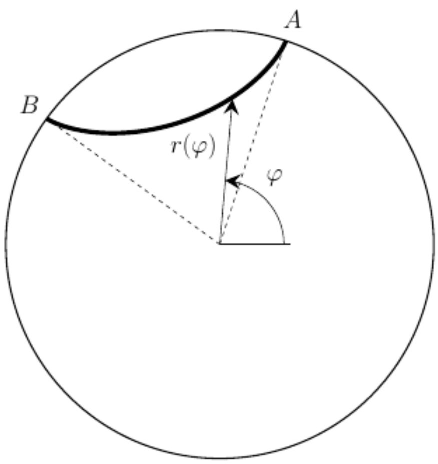
$$r'(\varphi)^2 = \frac{R^2}{r_0^2}\left[\frac{r^2\left(r^2 - r_0^2\right)}{R^2 - r^2}\right]$$

siendo r_0 la distancia mínima al centro de la Tierra por la que pasa la curva. No se pide que se encuentre la solución a esta ecuación diferencial pero si se pide que indique como encontraría esta constante r_0 a partir de los datos del problema.

Observación: El resultado final del tiempo empleado para ir de A a B a través de este camino es

$$T(\Delta\varphi) = \sqrt{\frac{R}{g}}\sqrt{\Delta\varphi(2\pi - \Delta\varphi)}, \quad \Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$$

En casa luego del parcial puede calcular ese tiempo para dos ciudades de la Tierra. Seria más simple si elige ciudades sobre puntos en un mismo meridiano.



3. (**2.5 ptos**) Una nave espacial de masa m (aproximada como un objeto puntual) se mueve en presencia del potencial central

$$V(r) = -\frac{k}{r^3}, \qquad k > 0$$

Este potencial es generado por un objeto astronómico misterioso de masa $M \gg m$ (también pensado como puntual), de forma que es una buena aproximación considerar a este objeto como fijo en el origen.

(a) Escriba el Lagrangiano y estudie el problema unidimensional equivalente justificando los pasos necesarios. Muestre que existe una única orbita circular r_c. Halle su energía E_c, radio y período en términos de su momento angular. Analice su estabilidad.

(b) Grafique el potencial efectivo a partir de un análisis funcional (límites, puntos críticos, estabilidad). Discuta cualitativamente las trayectorias posibles. ¿Qué sucede si $E > E_c$?

(c) Suponga que usted se encuentra en un planeta muy lejos (aproximadamente infinito) del objeto a una distancia transveral b (conocida como *parámetro de impacto*), y quiere acercarse al objeto para estudiarlo. ¿Con qué velocidad inicial v_0 (perpendicular a la distancia b) necesitaría despegar para orbitar al objeto en su trayectoria circular? (*Ayuda: calcule el momento angular inicial*).

(d) Obtenga una expresión integral a partir de la cual podría encontrar la trayectoria $r(\varphi)$. Suponga que la trayectoria de la nave en el inciso anterior puede aproximarse por la fórmula $r(\varphi) = c + d/\varphi$, con $\varphi > 0$. Dibujela cualitativamente en el plano $x - y$. Identifique las constantes c y d con datos del problema.

Ayudas: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x} = \infty$; $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

4. (**2.5 ptos**) Dos barras de masa despreciable están unidas perpendicularmente, una de ellas tiene longitud l, mientras que la otra es mucho más larga. Una masa M se encuentra fija en la unión de las dos barras. Otra masa m puede moverse libremente a lo largo de la barra larga (suponga que puede atravesar a la masa M). La barra de longitud l se encuentra sostenida desde un techo, y todo el sistema puede oscilar con un ángulo θ, como se muestra en la figura. Hay gravedad.

(a) ¿Cuántos grados de libertad hay? Escriba el lagrangiano del sistema.

(b) Halle alguna posición de equilibrio y obtenga el lagrangiano de pequeñas oscilaciones alrededor de dicho punto.

(c) Obtenga las frecuencias y los modos de oscilación. Analice los resultados obtenidos, ¿qué puede decir acerca de la estabilidad del punto de equilibrio?