## Segundo Parcial de Mecánica Clásica - primer cuatrimestre de 2021

Justifique todas sus respuestas, basándose en argumentos autocontenidos. No se aceptarán como válidas justifaciones del estilo: “como vimos en la practica del 27/04” o “segun el pdf de fulano/a”. Leyendo lo escrito debería entenderse el argumento.

Se aprueba con 6 puntos, con la condición de tener al menos dos de los ejercicios con más del 50% de su desarrollo correcto.

Ponga su nombre en la primer hoja y enumere todas las carillas. Entregue un único PDF con los distintos problemas en hojas separadas, con nombre de archivo *Apellido_Nombre_LUxxxx*. La entrega se hará en el campus, en la solapa “primer parcial”. De haber algun problema con el campus, puede enviarse por mail a mauricioleston@gmail.com con copia a maxx.coppola@gmail.com

1. (**4 ptos**) Una pelota de tenis (aproximada como una esfera) de masa $M$ y radio $R$ y un anillo de masa $m$ y radios interior $R_1$ y exterior $R_2$ se vinculan mediante una llave de Allen de masa despreciable articulada que pasa por un soporte en el punto fijo $A$. La llave se une de manera perpendicular al centro del anillo, a una distancia fija $d$ desde $A$, mientras que la distancia a la pelota desde $A$ es $\ell$. Ambos cuerpos se mueven en presencia de gravedad, pero el soporte no permite rotación en el eje de la llave. Suponga por simplicidad que $M \gg m$ y por tanto la pelota se mantiene siempre por debajo del punto $A$.

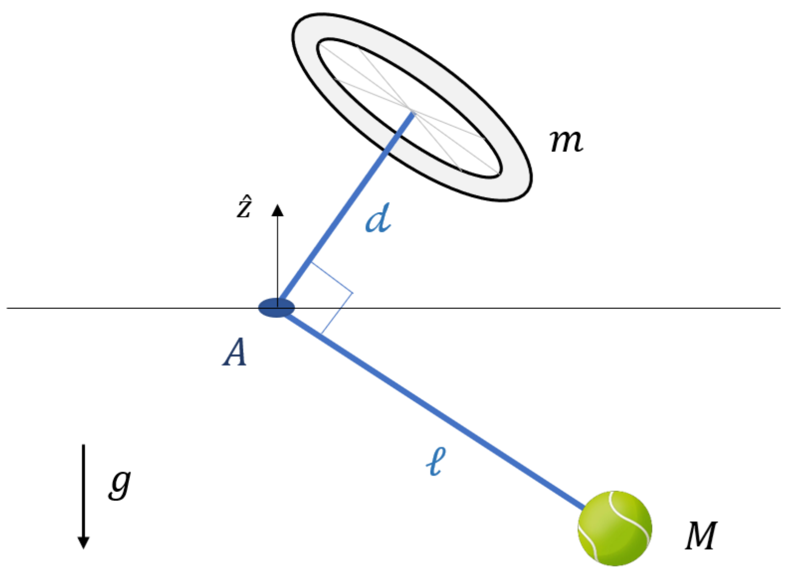
   (a) Halle la matriz del tensor de inercia del anillo y la pelota por separado.

   (b) ¿Cuántos grados de libertad hay? Escriba el Lagrangiano del sistema.

   (c) Encuentre las cantidades conservadas y halle el potencial efectivo unidimensional equivalente.

   (d) Discuta el límite $m \to 0$ y $R \to 0$. ¿Que esperaría obtener en este caso?

*Ayudas:* $\displaystyle\int_0^\pi dx \sin^3(x) = 2\int_0^\pi dx \cos^2(x)\sin(x) = \frac{4}{3}\,; \qquad \int_0^{2\pi} dy \sin^2(y) = \int_0^{2\pi} dy \cos^2(y) = \pi$



2. (**3 ptos**)

La idea de este ejercicio es evaluar distintos aspectos del formalismo Hamiltoniano en diferentes items no relacionados.

(a) Halle el Hamiltoniano correspondiente a una partícula de masa $m$ que se mueve, en el plano $xy$, sobre un riel sin rozamiento dado por una parábola de la forma: $y = y_0 - \alpha x^2$, con $\alpha > 0$ e $y_0 > 0$. Aquí $\hat{y}$ es la dirección de la vertical, en la que hay gravedad. Indique los grados de libertad y construya el diagrama de fases. Las ecuaciones de Hamilton deberían contener como solución el caso de un tiro oblicuo que siga por la sola acción de la gravedad la forma del riel. Verifique que existe una solución a las ecuaciones de Hamilton de la forma:

$$x(t) = v_0 t\,, \qquad p(t) = p_0 + \beta t^2$$

con $v_0$ arbitrario y $\beta$ y $p_0$ a determinar.

(b) Considere el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \alpha p + \lambda x^2$$

A partir de la expresión de $p$ en términos de $\dot{x}$ que obtenga de una de una de las ecuaciones de Hamilton, encuentre el Lagrangiano correspondiente.

(c) Considere el siguiente Hamiltoniano:

$$H = p_1^2 q_1^4 + p_2^2 \tag{1}$$

para un sistema cuyas coordenadas canonicas en el espacio de fases son $(q_1, p_1), (q_2, p_2)$. Muestre que la cantidad $p_1 q_1^2$ se conserva.

Halle una transformación canonica (muestre explicitamente que la transformación propuesta es canónica) que lleve al Hamiltoniano anterior a la forma del de una partícula libre. Una vez hallada, interprete la cantidad conservada anterior.

3. (**3 ptos**)

Considere una partícula de masa $m$ que se mueve bajo la acción de la gravedad en el plano $(x, 0, z)$ restringida a la curva cicloide parametrizada por $x = l(q + \sin q)$ y $z = l(1 - \cos q)$ con $|q| < \pi/2$. El Hamiltoniano de este sistema resulta ser

$$H = \frac{p^2}{4ml^2(1 + \cos q)} + mgl(1 - \cos q)$$

(a) Dibujar las trayectorias en el espacio de fase y determinar cuales de ellas es de libración, rotación y escribir la ecuación de la curva separatriz.

(b) Calcular la variable acción $J = J(E)$, la frecuencia $\nu = \nu(J)$ y la variable ángulo $\theta = \theta(t)$. Muestre que la frecuencia es independiente de la condición inicial.

(c) Obtener la función principal de Hamilton $S = S(q, E, t)$ y encuentre una expresión para despejar $q(t)$ usando HJ.

Ayuda: Puede resultar útil el cambio de variable $s = \sin\frac{\theta}{2}$ y recordar que $cos(\theta) = 1 - 2\ sin^2(\frac{\theta}{2})$