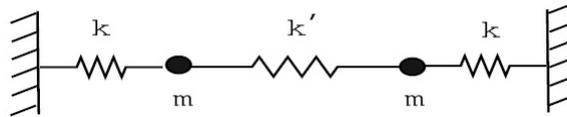


# Mecánica Clásica – 1er. Cuat. 2015

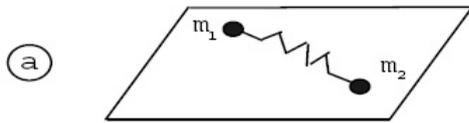
**Guía 1:** *Coordenadas generalizadas. Grados de libertad. Ecuaciones de Euler-Lagrange.*

**Problema 1:** Se tiene el sistema de la figura, donde  $x_1, x_2$  se miden a partir de las posiciones de equilibrio. Sea  $q_1 = x_1 + x_2$  y  $q_2 = x_1 - x_2$ .

- a) ¿Definen  $(q_1, q_2)$  un conjunto admisible de coordenadas generalizadas?
- b) Si  $q_1 = 0$ , describa cualitativamente el movimiento de cada partícula. Idem si  $q_2 = 0$ .
- c) Calcular las fuerzas generalizadas  $Q_1$  y  $Q_2$ .



**Problema 2:** Para los casos siguientes. ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?. Proponga conjuntos de coordenadas generalizadas adecuadas:

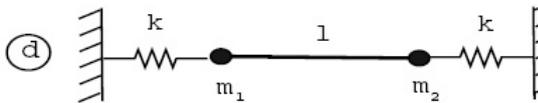


a)  $m_1$  y  $m_2$  se mueven en el plano de la mesa.

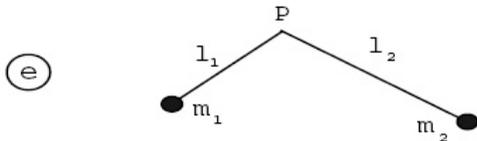


b) Idem, pero la mesa rota con  $\omega = \text{cte.}$

c)  $m_1$  y  $m_2$  se hallan dentro de un tubo. Si  $q_1$  y  $q_2$  se miden a partir del centro de masa, ¿son coordenadas apropiadas?



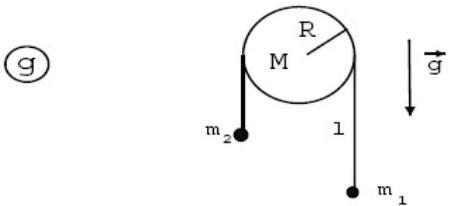
d) Las dos masas se hallan unidas entre sí por una barra rígida. Analice el caso en que sólo pueden moverse horizontalmente y también el caso bidimensional.



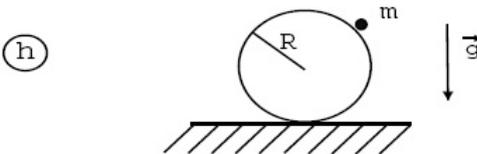
e) Discuta los casos P fijo y P móvil.



f) Una masa enhebrada en un alambre elíptico.

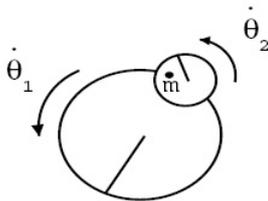


g) Una máquina de Atwood. Analice los casos en que la cuerda desliza y no desliza sobre la polea.



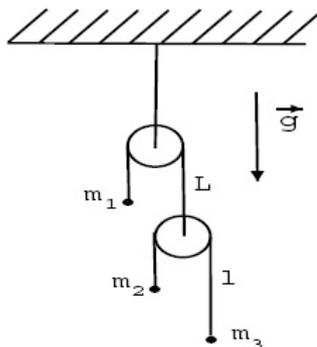
h) Una partícula puntual que cae por una esfera, con gravedad.

**Problema 3:**  $D_1$  y  $D_2$  son dos plataformas rotantes como se muestra en la figura.  $D_1$  se mueve respecto a la tierra con velocidad  $\dot{\theta}_1$ .  $D_2$  se mueve respecto a  $D_1$  con velocidad  $\dot{\theta}_2$ . Una partícula de masa  $m$  se mueve libremente sobre  $D_2$ . Escriba el lagrangiano del sistema en términos de coordenadas polares  $\rho, \varphi$ , de un sistema cartesiano fijo a  $D_2$ . Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula e interprete.



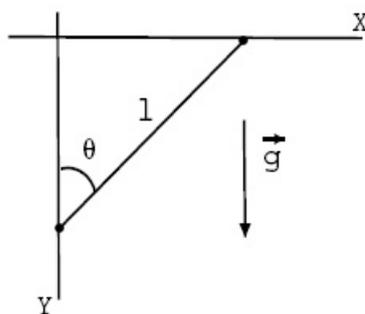
**Problema 4:** Se tiene el sistema de la figura. Hallar la aceleración de cada masa utilizando:

- Las ecuaciones de Newton y condiciones cinemáticas.
- El principio de los trabajos virtuales (PTV).
- Las ecuaciones de Lagrange.
- \*) Repita a y b, pero ahora considerando que las poleas tienen masa  $M$  y radio  $R$ .



**Problema 5:** Dos partículas de masa  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por un hilo inextensible de longitud  $l$ ;  $m_1$  se mueve sólo sobre el eje  $x$  y  $m_2$  sólo sobre el  $y$ . Las condiciones iniciales son las que indica la figura.

- Halle la ecuación de movimiento para  $\theta$  utilizando el PTV.
- Halle la ecuación de Lagrange para  $\theta$ .
- Si  $m_1 = m_2 \equiv m$ , halle la tensión  $T$  en el hilo como función de  $\theta$ .
- ¿Cuál es el período de movimiento de  $\theta$  en este caso?. Suponga que  $\theta$  sólo puede tomar valores pequeños.

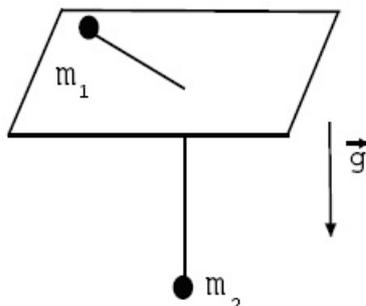


**Problema 6:** Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por un hilo inextensible como indica la figura.  $m_1$  se mueve en el plano de la mesa y  $m_2$  sólo verticalmente. En  $t = 0$ ,  $m_1$  se encuentra a una distancia  $r_0$  del orificio y se le aplica una velocidad  $v_0$  perpendicular al hilo.

a) Escriba las ecuaciones de Lagrange y halle sus integrales primeras en términos de las condiciones iniciales.

b) Halle la tensión del hilo.

c) Repita a) y b) suponiendo ahora que el movimiento de  $m_2$  es bidimensional.



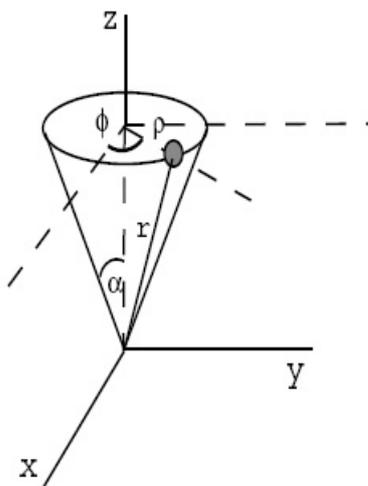
**Problema 7:** Bajo la acción de la gravedad, una partícula de masa  $m$  se desliza por una superficie cónica  $\rho = z \operatorname{tg}\alpha$ , sin rozamiento.

a) Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula utilizando como coordenadas generalizadas el ángulo  $\theta$  medido en el plano perpendicular al eje del cono y la distancia  $r$  al vértice del mismo, tomada a lo largo del cono.

b) Hallar  $r$  máximo y  $r$  mínimo para el caso en que  $\alpha = 30^\circ$  y las condiciones iniciales sean  $r(0) = a$ ,  $\dot{r}(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}^2(0) = 4\sqrt{3}g/a$ .

c) Halle el potencial efectivo unidimensional equivalente. Muestre que las órbitas circulares son posibles y halle la velocidad de la partícula en tales órbitas.

d) Suponiendo la partícula en movimiento circular, halle la constante del oscilador y el período de oscilación para pequeñas perturbaciones de este movimiento. Compare este período con el de revolución para hacer una descripción cualitativa del movimiento perturbado.

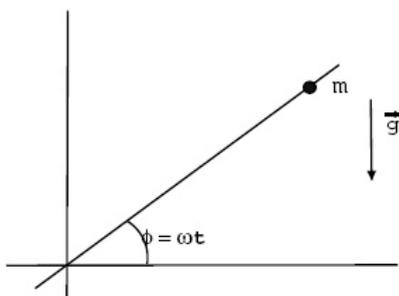


**Problema 8:** Analizar los siguientes puntos:

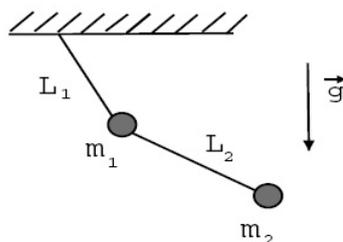
- Dado un sistema constituido por  $N$  partículas, ¿cuál es el número de grados de libertad del mismo y cuál el de ecuaciones de vínculo?
- ¿Se puede utilizar una velocidad como coordenada generalizada?
- ¿Las fuerzas generalizadas se aplican sobre cada partícula?
- El número de grados de libertad de un sistema, ¿es independiente del sistema de referencia utilizado para describir el movimiento?
- Para estudiar el equilibrio de un sistema, ¿es siempre válido utilizar el *principio de los trabajos virtuales*?
- ¿Es válida la formulación lagrangiana para un potencial dependiente de la velocidad? ¿y para el campo electromagnético?
- Dé un ejemplo en que un desplazamiento virtual difiera de uno real. ¿En qué casos son iguales?
- Las ecuaciones de vínculo para un sistema físico, ¿dependen del sistema de referencia utilizado?, ¿y las fuerzas de vínculo?
- Para calcular las fuerzas de vínculo de un sistema, ¿qué métodos es posible emplear?
- ¿Siempre se pueden escribir las ecuaciones de Newton desde el centro de masa de un sistema?
- Para un sistema de  $N$  partículas, ¿cuántas ecuaciones de Newton se necesitan? ¿y de Lagrange?
- ¿Qué se entiende por un sistema inercial? ¿Serán correctas las ecuaciones de movimiento si se escribe el lagrangiano desde un sistema no inercial?
- Para una carga en un campo electromagnético, ¿se puede conservar el impulso lineal de la misma? ¿Qué magnitud se conserva?

**Problema 9:** Sea el sistema de la figura.

- Halle las ecuaciones de movimiento utilizando el método de Lagrange.
- Para el caso  $\mathbf{g} = 0$ , integre las ecuaciones para condiciones iniciales  $r(0) = r_0$ ,  $\dot{r}(0) = 0$ .
- Discuta el caso en que  $\varphi$  varía libremente.



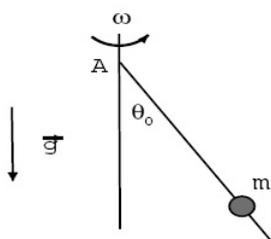
**Problema 10:** Considere el sistema de la figura.



- a) Encuentre las ecuaciones de movimiento para el péndulo doble que oscila en un plano.
- b) Halle una expresión aproximada de las mismas para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.
- c) Resuelva las ecuaciones proponiendo una solución de tipo armónico para los grados de libertad. En  $t = 0$  ambas masas se hallan en reposo sobre la vertical y a la inferior se le aplica una velocidad  $v_0$  perpendicular al hilo.
- d) Halle las tensiones sobre los hilos.

**Problema 11:** Una partícula de masa  $m$  se desliza sin fricción por un alambre fijo en el punto A, que forma un ángulo  $\theta_0$  con un eje vertical y que se encuentra rotando alrededor del mismo eje con velocidad angular constante  $\omega$ .

- a) Encuentre el lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange.
- b) Halle  $r(t)$  sabiendo que a  $t = 0$ ,  $r(0) = r_0$ ,  $\dot{r}(0) = 0$ .



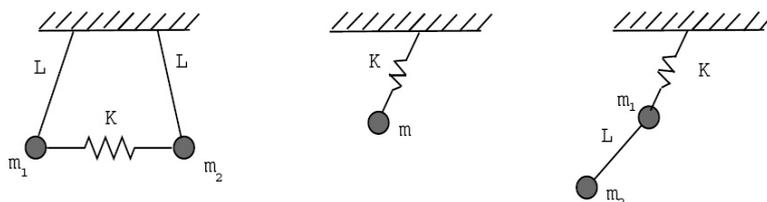
**Problema 12:** Considere el péndulo en tres dimensiones –péndulo esférico–.

- a) Encuentre las ecuaciones de Lagrange para el mismo.
- b) A partir de las ecuaciones de Lagrange halle las constantes de movimiento.
- c) Discuta cualitativamente el movimiento de este péndulo.

**Problema 13:** Escriba el lagrangiano de un péndulo plano donde el punto de suspensión:

- a) se desplaza uniformemente por un círculo vertical de radio  $a$  con frecuencia  $\omega$ ,
- b) efectúa oscilaciones verticales de la forma  $a \cos(\omega t)$ ,
- c) efectúa oscilaciones horizontales de la forma  $a \cos(\omega t)$ .

**Problema 14:** Encuentre el lagrangiano de los sistemas de la figura. Existe gravedad.

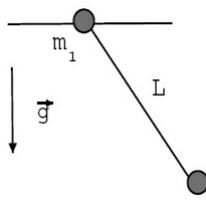


**Problema 15\*:** Sea una partícula libre de masa  $m$  y carga  $q$  en un campo electromagnético con potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$ , (luego  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - c^{-1}\partial\vec{A}/\partial t$ ;  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ).

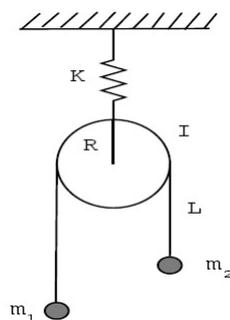
- a) Obtenga a partir del lagrangiano  $\mathcal{L} = T - U$  –donde  $U$  es un potencial generalizado dependiente de la velocidad– las ecuaciones de movimiento.
- b) Muestre que la fuerza aplicada sobre la partícula es la de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + c^{-1}\vec{v} \times \vec{B})$ ,  $U = q\phi - qc^{-1}\vec{v} \cdot \vec{A}$ .

**Problema 16\*:** Sean  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , dos sistemas de referencia cartesianos bidimensionales. Suponga que el origen de coordenadas  $O$  se mueve con  $\vec{v} = cte$  respecto a  $x_1, y_1$  y que los ejes  $x_2, y_2$  rotan con velocidad angular constante. Hallar explícitamente las ecuaciones de transformación:  $x_1 = x_1(x_2, y_2, t)$  y  $y_1 = y_1(x_2, y_2, t)$ .

**Problema 17:** Encuentre el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del siguiente sistema: un péndulo simple de masa  $m_2$ , con una masa  $m_1$  en el punto sostén, la cual puede moverse sobre una línea horizontal contenida en el plano de movimiento de  $m_2$ . Resuelva las ecuaciones de movimiento y halle la frecuencia de oscilación del sistema para pequeños apartamientos de la posición de equilibrio estable. Suponga condiciones iniciales adecuadas.



**Problema 18\*:** Escriba el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del siguiente sistema: una máquina de Atwood con una cuerda de largo  $L$ , una polea con momento de inercia  $I$  y que rueda sin deslizar con la cuerda.



**Problema 19\*:** Sea una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  inmersa en un campo magnético uniforme  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ .

- Si  $\vec{A} = Bx\hat{y}$  –compruebe que  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ –, encuentre las ecuaciones de movimiento y muestre que las órbitas son espirales cilíndricas. Calcule el radio y el centro de la circunferencia transversal a dicha espiral. Las condiciones iniciales son  $\vec{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $\vec{v}(0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ .
- Repita el punto a) pero ahora para el potencial vector  $\vec{A}' = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ .
- Calcule la función  $\psi$  que da el cambio de medida –cambio de gauge–  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$ .
- Si  $\vec{v}(0) = 0$ , interprete físicamente la solución hallada en a).

**Problema 20:** Sea un oscilador isótropo bidimensional ( $k_x = k_y \equiv k$ ).

- Escriba el lagrangiano del sistema y halle las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas  $q_1 = x$  y  $q_2 = y$ .
- Sea  $\mathcal{L}^* = m\dot{x}\dot{y} - kxy$ . Halle las ecuaciones de movimiento para este sistema. Compare con las obtenidas en a).