

Mecánica Clásica – 1er. Cuat. 2015

Guía 4: Fuerzas Centrales. Choque y dispersión.

Problema 1: Dos partículas se mueven una alrededor de la otra en órbitas circulares bajo la influencia de fuerzas gravitatorias. El período del movimiento es τ . Este movimiento es detenido súbitamente. Luego se las suelta y caen una hacia la otra. Discuta por qué. Demuestre que chocan después de un tiempo $t = \tau/4\sqrt{2}$.

Problema 2: El potencial de un oscilador isótropo es $V = (1/2)kr^2$.

- Dibuje el potencial efectivo para un caso general.
- Discuta los movimientos posibles en función del valor del momento angular y las condiciones iniciales.
- Encuentre el período para el caso en que la órbita es circular.
- Describa la naturaleza de las órbitas cuando difieren levemente de la circular.

Problema 3: Estudie el movimiento de una partícula en un campo central $F(r) = -k/r^2 + c/r^3$.

- Muestre que la ecuación de la órbita puede escribirse de la forma $r = a(1 - \varepsilon^2)/(1 + \varepsilon \cos \alpha\varphi)$ que es una elipse cuando $\alpha = 1$.
- Cuando $\alpha > 1$, es una elipse que precesiona. El movimiento de precesión puede describirse en términos de la velocidad de precesión del perihelio. Encuentre una expresión para la velocidad de precesión en términos de α .

Ayuda: Observe que el problema se reduce al de Kepler, si se redefinen el momento y la variable angular apropiadamente. Por lo tanto *no* es necesario calcular nuevamente la órbita, si ya resolvió el problema de Kepler –¿lo resolvió?.

Problema 4: Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un potencial central $V(r) = k/r^2$.

- Hallar la ecuación de la trayectoria de la partícula como función de constantes de movimiento para el caso en que el potencial sea repulsivo y $E > 0$. Interpretar el movimiento bidimensional (θ, r) en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujar la trayectoria. Calcular las direcciones de las asíntotas si las hubiere. ¿Qué ocurre cuando $k = 0$? Verificar que en el límite $k \rightarrow 0$, la solución hallada es la físicamente correcta.
- Suponer ahora que el potencial es atractivo. ¿Qué ocurre cuando $l^2 > -2mk$? Suponer que $l^2 < -2mk$, $E < 0$. Interpretar el movimiento bidimensional en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujar la trayectoria. ¿Qué pasa con $\dot{\theta}$? (no se pide calcular la trayectoria). Calcular el tiempo que tarda la partícula en llegar al origen si partió de un punto de retorno.

Ayuda:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a - bu^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsen \left(\sqrt{\frac{b}{a}} u \right), & \text{si } a > 0, b > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-b}} \operatorname{argsenh} \left(\sqrt{\frac{-b}{a}} u \right), & \text{si } a > 0, b < 0 \end{cases}$$

Para calcular la trayectoria, suponer r_0 un punto de retorno y $\theta_0 = 0$. Considere además la ayuda del problema anterior.

Problema 5: Considere una partícula de masa m que se mueve en el espacio bajo la acción de un campo de fuerzas radial $F(r) = -kr + c/r^3$, siendo r la distancia al origen de coordenadas.

a) Escriba el lagrangiano y las constantes de movimiento en función de las coordenadas generalizadas elegidas.

b) Halle la ecuación de la órbita ($r = r(\theta)$).

c) Grafique cualitativamente la trayectoria de la partícula para $c = 0$ y $c \neq 0$.

d) Discuta en qué casos la órbita no será cerrada y calcule la velocidad angular de precesión.

Problema 6: Calcule la sección eficaz de dispersión de partículas por una esfera perfectamente rígida de diámetro a .

Problema 7: Calcule la sección eficaz de dispersión de partículas de masa m , en un pozo de potencial esféricamente simétrico con $V = 0$ para $r \geq a/2$ y $V = -V_0$ para $r < a/2$.

Problema 8: Considere una esfera rígida que absorbe las partículas de un haz incidente sobre ella con una probabilidad proporcional a la componente normal de la velocidad v_n (componente de la velocidad v que es normal a la superficie de la esfera). Las partículas no absorbidas rebotan elásticamente.

a) Hallar la sección eficaz diferencial.

b) Obtener la sección eficaz total. Justificar.

Problema 9: Se hace incidir un haz uniforme de partículas sobre un paraboloide de revolución perfectamente rígido, en forma paralela al eje de simetría del cuerpo.

a) Calcular la sección eficaz diferencial de *scattering*.

b) A partir de a) calcular, explícitamente, la sección eficaz total de *scattering*.

Problema 10: Se hace incidir un haz uniforme de partículas sobre un cono perfectamente rígido, en forma paralela al eje de simetría del cuerpo.

a) Calcular la sección eficaz diferencial de *scattering*.

b) ¿Puede obtener la sección eficaz total de *scattering*? Justificar.