

Mecánica Clásica – 1er. Cuat. 2015

Guía 7: Ecuaciones de Hamilton, transformaciones canónicas.

Problema 1: Escriba el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton para:

- Un oscilador armónico tridimensional (no necesariamente isótropo). Use coordenadas cartesianas. Resuelva las ecuaciones.
- Una partícula en un potencial central $U(r)$. Halle las constantes de movimiento. En el caso particular $U(r) = -k/r$, discuta las órbitas posibles.
- Un trompo simétrico que se mueve libremente (sin gravedad). Ídem con un punto fijo, en el campo gravitatorio terrestre. En ambos casos, halle las constantes de movimiento.
- Una máquina de Atwood, considerando los casos en que la polea, de radio R , carece de masa y tiene masa M .
- Construya los diagramas de fases correspondientes.

Problema 2: Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para un oscilador armónico tridimensional isótropo en coordenadas *cilíndricas* y en coordenadas *esféricas*. Construya los correspondientes diagramas de fases.

Problema 3: Una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía en el tiempo: $r = r(t)$, donde $r(t)$ es una función conocida. Obtenga el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discuta la conservación de la energía. ¿Es el hamiltoniano la energía total?

Problema 4: Considere una partícula moviéndose en un plano bajo la influencia del potencial generalizado $V = (1/r)(1 + \dot{r}^2)$, donde r es la distancia al origen. Encuentre los momentos generalizados p_r y p_θ y H . Obtenga las ecuaciones canónicas y muestre que el impulso angular se conserva. ¿Se conserva H ? ¿Es $H = E$? Reduzca el problema para r a una ecuación diferencial de primer orden.

Problema 5: Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para una partícula cargada en un campo magnético uniforme y constante \mathbf{B} en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$, utilizando como potencial vector

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}.$$

Problema 6: Se tiene un sistema de dos masas puntuales m_1 y m_2 que interactúan con un potencial $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Muestre que su hamiltoniano puede escribirse como $H = H_{cm} + H_{rel}$

$$H_{cm} = \frac{P_{cm}^2}{2M} \quad H_{rel} = \frac{p_{rel}^2}{2\mu} + V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

donde $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ es la masa reducida del sistema, $M = m_1 + m_2$, L es el momento angular total y p_{rel} es el momento canónicamente conjugado de r .

Problema 7: Demuestre que la transformación siguiente es canónica

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\text{sen}q_1 + p_2), \quad p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2), \quad p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2p_1}\text{sen}q_1 + p_2),$$

donde $\omega = qB/mc$. Úsela para encontrar una solución alternativa del Problema 5.

Problema 8: Considere los siguientes puntos:

a) Pruebe que si se hace una transformación canónica de (q, p) a (Q, P) se tiene:

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}; \quad \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i};$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}.$$

b) Considere un oscilador unidimensional de hamiltoniano $H = p^2/2m + (k/2)q^2$. Muestre que la transformación

$$Q = \ln\left(\frac{\text{sen}p}{q}\right), \quad P = q \cot p$$

es canónica, y determine las funciones generatrices $F_1(q, Q)$ y $F_2(q, P)$.

Problema 9: Considere un oscilador bidimensional con hamiltoniano

$$H(p, q) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Muestre que la transformación que sigue es canónica y halle el nuevo hamiltoniano $H'(P, Q)$ y las correspondientes ecuaciones de Hamilton

$$x = X \cos \lambda + \frac{P_y \text{sen} \lambda}{m\omega} \quad p_x = -m\omega Y \text{sen} \lambda + P_x \cos \lambda$$

$$y = Y \cos \lambda + \frac{P_x \text{sen} \lambda}{m\omega} \quad p_y = -m\omega X \text{sen} \lambda + P_y \cos \lambda$$

Describa además el movimiento del oscilador bidimensional cuando $y = p_y = 0$ en $t = 0$.

Problema 10: Analizar los siguientes puntos:

a) ¿Bajo qué condiciones pueden ser H y L^2 simultáneamente variables canónicas?. Ídem para H y L_z .

b) ¿Pueden ser L_x y L_y simultáneamente variables canónicas?. Ídem para L_x y L^2 .

c) ¿Se modifica el elemento de volumen en el espacio de las fases en una transformación canónica?.

Problema 11: Demuestre las siguientes propiedades de los corchetes de Poisson, siendo f, g, h funciones arbitrarias de p_i, q_i ; $F(f)$ es una función de f y c es una constante.

a) $[f, c] = 0$; $[f, f] = 0$; $[f, g] + [g, f] = 0$; $[f + g, h] = [f, h] + [g, h]$; $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$;
 $\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}]$; $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$; $[f, F(f)] = 0$.

b) $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$; $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$; $[f, q_i] = -\frac{\partial f}{\partial p_i}$; $[f, p_i] = \frac{\partial f}{\partial q_i}$.

c) $[f, g^n] = ng^{n-1}[f, g]$; $[g, F(f)] = F'(f)[g, f]$.

Problema 12: Considere los siguientes puntos:

a) Muestre que si f y g son constantes de movimiento, también lo es $[f, g]$.

b) Calcule explícitamente, para una partícula, los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas de \mathbf{L} con las de \mathbf{p} y las de \mathbf{r} . Además calcule $[L_x, L_y]$, $[L_y, L_z]$, $[L_x, L^2]$, donde $L^2 = |\mathbf{L}|^2$.

Problema 13: Considere los siguientes puntos:

a) Demuestre que $df/dt = [f, H] + \partial f/\partial t$. ¿Qué obtiene para $f = q_i$ ó $f = p_i$? Si f no depende explícitamente del tiempo, muestre que la condición necesaria y suficiente para que f sea constante de movimiento es que $[f, H] = 0$.

b) Muestre que si una coordenada q_i es cíclica, la transformación canónica de función generatriz $G = p_i$ es la transformación de simetría asociada al carácter cíclico de q_i . Observe que si f es una constante de movimiento, la transformación canónica infinitesimal de generatriz $G = f$ deja invariante al Hamiltoniano. ¿Qué relación tiene esto con el teorema de Noether?.

Problema 14: Muestre que, para una partícula sometida a un potencial con simetría cilíndrica alrededor del eje z , L_z es una constante de movimiento y que, si el potencial es central, entonces \mathbf{L} es constante.