Mecánica Clásica – 1er. Cuat. 2015

Guía 8: *Ecuación de Hamilton–Jacobi.*

Problema 1: Considerar el sistema físico cuya energía cinética es $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(q_1^2 + q_2^2)$ y cuya energía potencial resulta $V = (q_1^2 + q_2^2)^{-1}$, donde q_1, q_2, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ son coordenadas y velocidades generalizadas. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi para este sistema?. Resuelva esta ecuación para encontrar la función principal de Hamilton (S). Encuentre o deduzca de allí el comportamiento dinámico del sistema.

Problema 2: Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x sometida a un potencial $V = a \sec^2(x/l)$, donde a y l son constantes. Resuelva la ecuación de H–J encontrando una expresión integral para S. Encuentre $x = x(t)$ utilizando S.

Problema 3: Considere un movimiento unidimensional de una partícula de masa m sometida a una fuerza uniforme $F = at$ ($a =$ cte.) que aumenta linealmente con el tiempo. Encuentre el hamiltoniano del sistema. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi?. Muestre que la función principal de Hamilton (S) puede escribirse como

$$S = \frac{1}{2} a t^2 x + \alpha x - \phi(t)$$

donde α es una constante y ϕ es una función del tiempo. Resuelva la ecuación para ϕ. De allí encuentre la posición y el momento canónico conjugado en función del tiempo.

Problema 4: Para un oscilador armónico unidimensional:
a) Halle la trasformación canónica de función generatriz: $F_1(Q, q) = \lambda q^2 \cot Q$ eligiendo λ para que el nuevo hamiltoniano sea $K(Q, P) = \omega P$ (ω: pulsación del oscilador).
b) Muestre que (Q, P) son variables de ángulo–acción. Halle el área encerrada por las curvas de E (energía) constante en el espacio de fases, y muestre que la curva que corresponde a un P dado encierra un área $2\pi P$.
c) Halle la función generatriz de tipo $F_2(P, q)$ que genera la misma transformación canónica $(q, p) \to (Q, P)$. ¿Qué relación hay entre F_1 y F_2?.

Problema 5: Demuestre que la función generatriz de la transformación canónica que lleva a variables de ángulo y acción es $F_2(q, J) = \int^q p(J, q')\, dq'$. Pruebe que esta función *no* es periódica como función de q, pero que $F_1(q, Q)$ *sí* lo es.

Problema 6: Considere el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - k q_1)^2$$

y resuelva el problema utilizando:
a) La técnica de Hamilton–Jacobi. Encuentre la órbita general de la solución de la ecuación de H–J. ¿Qué sistema físico podría corresponder a este problema?.
b) Las ecuaciones canónicas.

c) Haciendo una transformación canónica con $Q_1 = Ap_1$, $P_1 = B(p_2 - kq_1)$, eligiendo Q_2 y P_2 convenientemente (A y B son constantes), resolviendo para Q_i y P_i y luego antitransformando.
d) Por medio de variables de ángulo–acción.

Problema 7: Considere un péndulo físico constituido por una barra de longitud l, que puede moverse en un plano vertical, con uno de sus extremos fijo (la barra gira libremente a su alrededor). El momento de inercia de la barra respecto al punto fijo es I. Hay gravedad.
a) Muestre que el hamiltoniano del sistema es $H = \frac{1}{2}I(p_\psi^2 - 2\alpha^2 \cos\psi)$ donde ψ es el ángulo de la barra con la vertical, p_ψ su momento conjugado y α una constante a determinar.
b) Construya el correspondiente diagrama de fases; halle puntos de equilibrio y discuta su estabilidad; construya la curva separatriz correspondiente (halle su ecuación). Determine los movimientos de libración y rotación posibles y halle su período.
c) Muestre que el área encerrada por la separatriz es 16α. Deduzca que el máximo valor de la variable de acción para el movimiento de libración es $8\alpha/\pi$.

Problema 8: Una partícula de masa m se mueve en el potencial

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\lambda^2(x+a)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}m\lambda^2(x-a)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Plantee las ecuaciones de Hamilton, construya diagramas de fases, considerando especialmente las curvas de fases próximas al origen.
b) Muestre que el espacio de fases se divide en 3 regiones invariantes, en las cuales se definen distintas variables de ángulo–acción. Halle las mismas en función de la energía E en cada caso.

Problema 9: Escriba las variables de acción y ángulo para las rotaciones en un plano de una barra con un punto fijo, sometida a un potencial angular $V(\psi) = k|\psi|/\pi$ si $-\pi < \psi < \pi$ ($k > 0$), $V(\psi)$ periódico $[V(\psi + 2\pi) = V(\psi)]$.

Problema 10: Considere una partícula con hamiltoniano $H = p^2/(2m) + V(q)$, para cada uno de los siguientes casos: i) $V(q) = -k^2/q + l^2/2mq^2$ y ii) $V(q) = m\omega^2q^2/2 + l^2/2mq^2$.
a) Dibuje los diagramas de fases, escriba las ecuaciones de las curvas separatrices e indique las regiones que corresponden a movimientos de libración y rotación.
b) Para los movimientos de libración exprese a la variable de acción como función de la energía y halle la relación $\psi = \psi(q, J)$ donde ψ es la variable de ángulo. ¿Cómo es la frecuencia del movimiento?
c) Encuentre la energía de las trayectorias que satisfacen las relaciones $J = n\hbar$ y $l = p\hbar$ (con n,p números naturales y $\hbar =$ cte.). Discuta este punto con su docente.

Problema 11: Una partícula se mueve en el espacio bajo la acción de un potencial central $V(|\mathbf{r}|)$.
a) Calcule las variables de acción para la parte angular del movimiento. ¿Cómo se expresa el módulo del momento angular como función de las mismas?
b) ¿Bajo qué condiciones el movimiento de la partícula será periódico?. Demuestre explícitamente que para el problema de Kepler y para el escilador armónico el movimiento *es* periódico pero que para un potencial de la forma $V = a/r^2$ no lo es. Obtenga la frecuencia de movimiento

como función de la energía.
c) ¿Cuál es la energía de las órbitas definidas por las relaciones $J_i = n_i\hbar$?. ¿Cuánto vale el momento angular de las mismas?. (n_i entero y $\hbar =$ cte.).

Problema 12: Para el potencial $V(q) = \epsilon(1 - \alpha/q)^2$
a) Dibujar el diagrama de fases indicando las zonas de libración.
b) Calcular las variables de ángulo y acción $J = J(E)$ y $\psi = \psi(q, J)$.
c) ¿Qué pasa con el período del movimiento cuando la energía tiende al valor que corresponde a la curva separatriz?.